Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич

Введение в MathCAD 2000

Учебное пособие

Гродно 2001

УДК
ББК
Ш 98

Рецензенты: зав. кафедрой информационных технологий Института последипломного образования, кандидат технических наук В.Г.Родченко;

доцент кафедры ФА и ИУ, прикладной математики ГрГУ, кандидат физико-математических наук Н.Н.Иванов.

Рекомендовано советом математического факультета ГрГУ имени Янки Купалы.

Шушкевич Г.Ч.

Ш98 Введение в MathCAD 2000: Учеб. пособие / Г.Ч.Шушкевич, С.В.Шушкевич. — Гродно: ГрГУ, 2001. — 138 с.

ISBN

УДК
ББК

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

Миллионы людей занимаются математическими расчетами, иногда в силу влечения к таинствам математики и ее внутренней красоте, а чаще в силу профессиональной или иной необходимости. Ни одна серьезная разработка в любой отрасли науки и производства не обходится без трудоемких математических расчетов.

Вначале эти расчеты выполнялись на программируемых микрокалькуляторах или с помощью программ на универсальных языках программирования, таких, как Бейсик, Паскаль. Постепенно для облегчения расчетов были созданы специальные математические компьютерные системы.

Система MathCAD занимает особое место среди множества таких систем, как Eureka, MatLAB, Mathematica, Maple и других, и по праву может называться самой современной, универсальной и массовой математической системой. Ее название представляет собой аббревиатуру выражения **Math**ematical **C**omputer **A**ided **D**esign (математическое автоматизированное проектирование), что говорит о назначении системы – решение различных вычислительных задач.

Она позволяет выполнить как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеет удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики. Новая версия MathCAD 2000 работает под управлением Windows 95/98/2000/NT.

Система MathCAD изначально создавалась для численного решения математических задач (1988), и только начиная с 1994 г. в нее интегрированы инструменты символьной математики из системы Maple, что постепенно превратило MathCAD в универсальный инструмент решения математических задач.

Системы класса MathCAD предоставляют уже привычные, мощные, удобные и наглядные средства описания алгоритмов решения математических задач. Преподаватели и студенты вузов получили возможность подготовки с их помощью наглядных и красочных обучающих программ в виде электронных книг с действующими в реальном времени примерами. Новейшая система MathCAD 2000 PRO настолько гибка и универсальна, что может оказать неоценимую помощь в решении математических задач как школьнику, постигающему азы математики, так и академику, работающему со сложнейшими научными проблемами. Система имеет достаточные возможности для выполнения наиболее массовых символьных (аналитических) вычислений и преобразований.

Более 1500000 зарегистрированных пользователей владеют ранними версиями системы MathCAD во всем мире, а с выходом новых версий системы это число наверняка заметно увеличится. О системе с такой вычислительной мощью, как у MathCAD 2000 PRO, еще пару десятков лет назад не могли мечтать даже разработчики уникальной научной и космической аппаратуры. Но эта мощь нисколько не затрудняет удивительно простое и интуитивно предсказуемое общение с системой на общепринятом языке математических формул и графиков.

Исключительно велика роль систем класса MathCAD в образовании. Облегчая решение сложных математических задач, система снимает психологический барьер при изучении математики. Грамотное применение систем в учебном процессе обеспечивает повышение фундаментальности математического и технического образования, содействует подлинной интеграции процесса образования в нашей стране и наиболее развитых западных странах, где подобные системы применяются уже давно. Новые версии MathCAD позволяют готовить электронные уроки и книги с использованием новейших средств мультимедиа, включая гипертекстовые и гипермедиа-ссылки, изысканные графики.

Наш опыт показывает, что систему MathCAD можно успешно использовать при проведении лабораторных занятий по курсам «Численные методы», «Математическое моделирование», «Методы математической физики».

Авторы выражают благодарность фирме MathSoft Inc. (USA) за предоставленную возможность использовать MathCAD 2000 Professional (№ PN902006DP0980T) при написании учебного пособия.

1. Интерфейс MathCAD 2000

После инсталяции MathCAD 2000 Professional и создания на рабочем столе ярлыка  можно запустить пакет на выполнение. Двойной щелчок левой кнопкой мыши по значку выводит на экран монитора заставку пакета (рис. 1.1), которая находится на экране монитора до тех пор, пока производится автоматическая загрузка программы.

Рис. 1.1. Заставка MathCAD 2000 Professional

Затем на экране монитора появляется окно MathCAD 2000 Professional (рис. 1.2).

В центре окна расположено окно Tip of the Day (Полезные советы), которое позволяет быстро ознакомить пользователя с возможностями MathCAD 2000 (информация на английском языке). Для переключения тем служит кнопка Next Tip (Следующая тема), а для перехода к работе с MathCAD 2000 – кнопка Close (Закрыть). Если появление окна Tip of the Day при последующих запусках MathCAD 2000 нежелательно, то следует отключить флажок Show tips on startup.

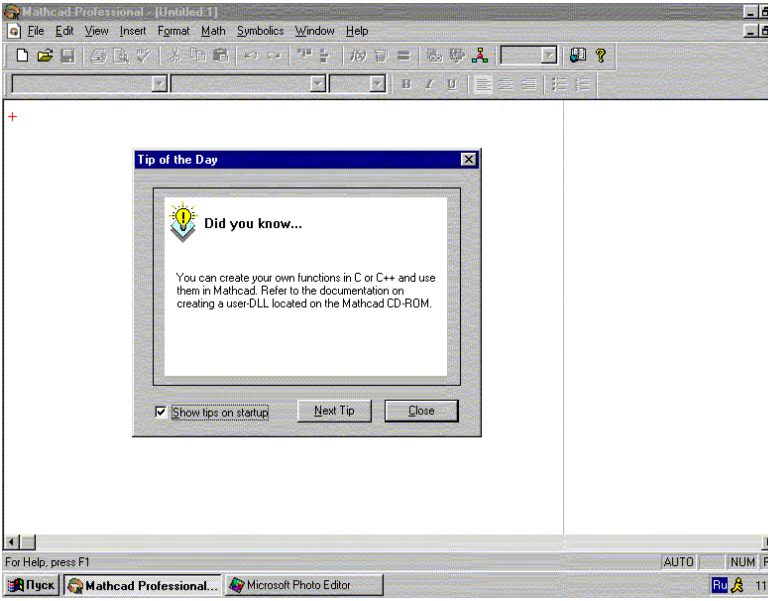


Рис. 1.2. Окно MathCAD 2000 Professional

В окне программы верхняя строка – строка заголовка, ниже размещаются строка меню и панели инструментов. В левой части строки заголовка находится кнопка управления окном MathCAD 2000. Щелчок левой кнопкой мыши по этой кнопке выводит на экран меню с названиями команд, позволяющими манипулировать окном пакета. За кнопкой управления окном следуют имя Windows – приложения MathCAD Professional и имя файла, в котором сохраняются результаты работы. По умолчанию имя файла – Untitled:1. В правой части строки заголовка находятся три кнопки для работы с окном программы: Свернуть, Развернуть на полный экран и Закрыть окно приложения.

Вторая строка сверху – строка главного меню MathCAD 2000 Professional. Она содержит следующие пункты:

- **File** (Файл) – работа с файлами;
- **Edit** (Правка) – обработка фрагментов документа;
- **View** (Вид) – настройка элементов окна;
- **Insert** (Вставка) – вставка объектов и их шаблонов;
- **Format** (Формат) – формирование параметров элементов текста;

· **Math** (Математика) – управление процессом вычисления;
· **Symbol** (Символьные операции) – выбор операции символьного процессора;
· **Window** (Окно) – управление окнами MathCAD 2000;
· **Help** (Помощь) – работа со справочной системой.

Щелчком левой кнопки мыши по одному из пунктов главного меню открывается ниспадающее меню со списком доступных (четкий шрифт) и недоступных команд (шрифт в фоновом режиме позволяет прочитать название команды).

Далее следуют панели инструментов. Традиционно в окне программы размещаются Стандартная панель инструментов и панель инструментов Форматирование.

Стандартная панель инструментов (Toolbars Standard) содержит кнопки для быстрого выполнения наиболее распространенных команд главного меню.

Четвертую строку окна занимает панель Форматирование (Toolbars Formatting), которая служит для выбора стиля и размеров шрифтов и способа выравнивания текстовых комментариев.

В окне MathCAD 2000 Professional может находиться также панель математических инструментов (Math) с пиктограммами,

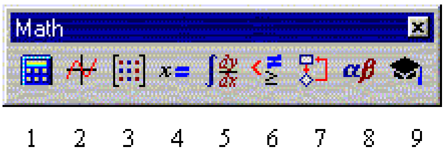


Рис. 1.3. Панель математических инструментов Math

которые открывают следующие панели инструментов (рис.1.3):
 – панель инструментов Calculator (Калькулятор). На этой панели находятся кнопки арифметических операций, элементарных функций. Кнопка := предназначена для ввода оператора присваивания, кнопка = – для численного вычисления выражения,
 – панель инструментов Graph (Графики) содержит инструменты для построения графиков,
 – панель инструментов Matrix (Матрицы). Инструменты

этой панели предназначены для ввода векторов и матриц, а также некоторых операций над ними,
 – панель инструментов Evaluation (Вычисление). Здесь находятся пиктограммы операторов локального и глобального присваивания значений переменным и задания функций, кнопки для символьного вычисления выражений,
 – панель инструментов Calculus (Исчисление). Инструменты этой панели позволяют вводить операторы интегрирования, дифференцирования, пределов, суммы и произведения,
 – панель инструментов Boolean (Булева). Эта панель содержит кнопки для ввода логических операторов и операторов сравнения,
 – панель инструментов Programming (Программирование),
 – панель инструментов Greek (Греческий алфавит). Эта панель предназначена для ввода греческих букв,
 – панель инструментов Symbolic (Символы).

Если панель математических инструментов отсутствует, это означает, что в подменю Toolbars (Панели инструментов) меню View (Вид) отключена опция Math и ее следует включить.

Под строкой панели Форматирование находится рабочее окно документа, в котором располагаются текстовые комментарии, введенные команды и математические выражения, выводимые результаты вычислений, графики. Всю информацию, расположенную в рабочем окне, называют Math-документом. Рабочее окно снабжено двумя полосами прокрутки – вертикальной и горизонтальной.

Последняя, нижняя строка окна – строка состояния. В ней записаны рекомендации к дальнейшим действиям, текущее состояние пакета, номер отображенной на экране страницы Math-документа.

Панели инструментов имеют слева выпуклую вертикальную черту. При нажатой левой кнопке мыши можно перетащить панель в любое место окна.

2. Основные команды главного меню MathCAD 2000

В этой главе представлен краткий обзор команд главного меню MathCAD 2000 Professional. Более подробно команды меню описаны в справочниках [5, 15] и во встроенном справочнике по работе с MathCAD.

2.1. Меню File (Файл)

После щелчка левой кнопкой мыши по пункту **File** главного меню будут выведены следующие команды (рис. 2.1.):

· **New** (Новый) – открыть окно для создания нового Math-документа;

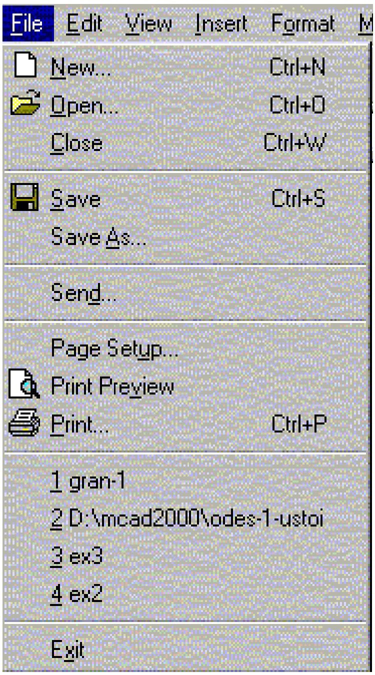


Рис. 2.1. Меню ***File***

· **Open** (Открыть) – открыть существующий Math-документ;

· **Close** (Закрыть) – закрыть текущий документ;

· **Save** (Сохранить) – сохранить на диске текущий документ. Если сохранение производится впервые, следует указать имя файла;

· **Save as...** (Сохранить как) – сохранить на диске текущий документ с новым именем. Пакет позволяет сохранить документ в форматах MathCAD 8, 7, 6 и еще в трех форматах, помимо стандартного формата пакета с расширением .mcd;

· **Send...** (Отправить) – отправить документ по электронной почте;

· **Page Setup...** (Параметры страницы) – открыть диалоговое окно для установки параметров страницы;

· **Print Preview...** (Предварительный просмотр) – предварительный просмотр документа перед печатью;

· **Print...** (Печать) – печать документа;

· **Exit** (Выход) – завершить работу с пакетом MathCAD.

Перед этой командой может присутствовать перечень из нескольких файлов, с которыми работали в последнее время, что позволяет загрузить любой из них без предварительного поиска.

В пункте меню **File**, как и в других пунктах меню, помимо команд, слева от команды указана кнопка этой команды в панели инструментов, если она есть, а справа – комбинация клавиш, которая позволяет запустить эту команду на выполнение без вызова соответствующего режима главного меню.

Некоторые строки пункта меню **File**, как и в других пунктах меню, имеют после имени команды знак ... (многоточие). Он означает, что данная команда имеет диалоговое окно, которое появится на экране после вызова команды щелчком левой кнопки мыши.

2.2. **Меню Edit (Правка)**

Большинство команд этого пункта меню можно использовать, когда в документе выделена одна или несколько областей. Под областью в документе подразумевается текстовая область, графический объект, математическое выражение (формула). Для выделения области в документе следует щелкнуть левой кнопкой мыши в левом верхнем углу области и, удерживая левую кнопку мыши, переместить курсор мыши в правый нижний угол области. Затем отпустить кнопку мыши. В результате область будет заключена в рамку, если выделена одна область, и в пунктирную рамку, если в ней находятся несколько областей (рис. 2.2).

В пункте меню **Edit** присутствуют следующие команды (рис. 2.2):

· **Undo** (Отменить изменения) – отменить последнюю операцию редактирования;

· **Redo** (Повторить) – повторить последнюю операцию редактирования;

· **Cut** (Вырезать) – переместить выделенную область в буфер обмена (Clipboard);

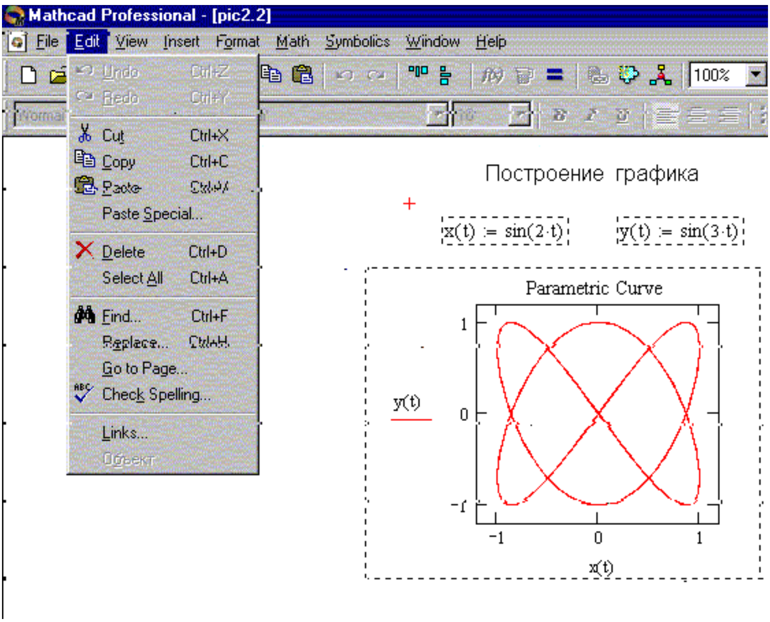


*Рис. 2.2. Меню **Edit***

· **Copy** (Копировать) – копировать выделенную область в буфер обмена, при этом выделенная область не удаляется из окна редактирования;

· **Paste** (Вставить) – вставить содержимое буфера обмена в документ, начиная с позиции, в которой установлен курсор;

· **Paste Special...** (Специальная вставка) – вставить в документ объекты, созданные в других приложениях. Например, можно создать рисунок в графическом редакторе PaintBrush, скопировать его в буфер обмена и вставить в документ;

· **Delete** (Удалить) – удалить выделенную область, при этом данная область в буфере обмена не сохраняется. Удаленную область невозможно восстановить командой Undo;

· **Select All** (Выделить все) – выделить все области документа пунктирным прямоугольником;

· **Find...** (Найти) – найти заданную текстовую или математическую строку в документе;

· **Replace...** (Заменить) – найти и заменить текстовую или математическую строку;

· **Go to Page...** (Перейти к странице) – осуществить переход на первую, последнюю или страницу с заданным номером;

· **Check Speling...** (Проверка орфографии) – проверить орфографию (для англоязычных текстов);

· **Links...** (Связи) – работа со встроенными файлами, которые были вставлены в документ с помощью команды Paste Special либо команды Object (Объект) меню Insert (Вставка);

· **Object** (Объект) – редактировать вставленный в документ объект.

Здесь надо отметить очередной казус совместной работы англоязычного MathCAD с русскоязычной операционной системой Windows 95: последняя позиция Object в подменю Edit записана на русском языке!

2.3. **Меню View (Вид)**

Этот пункт меню содержит команды настройки окна MathCAD (рис. 2.3):

· **Toolbars** (Панели инструментов) – включает / выключает отображение на экране панели инструментов Стандартная (Standard), панели инструментов Форматирование (Formatting) и математической панели (Math), а также панелей: Calculator (Ввод арифметических операций и некоторых часто используемых функций), Graph (Построение двух- и трехмерных графиков); Matrix (Ввод и обработка векторов и матриц), Evaluation (Задание операторов присваивания); Calculus (Вычисление производных и первообразных, сумм и произведений); Boolean (Задание логических операторов сравнения); Programming (Программирование); Greek (Ввод греческих букв); Symbolic (Задание ключевых слов, которые предписывают MathCAD произвести тот или иной вид символьных вычислений); Modifier (Дополнительные установки символьных преобразований), входящих в панель Math;

· **Status Bar** (Панель состояния) – включить / выключить отображение на экране строки состояния окна пакета, которая находится в нижней части окна;

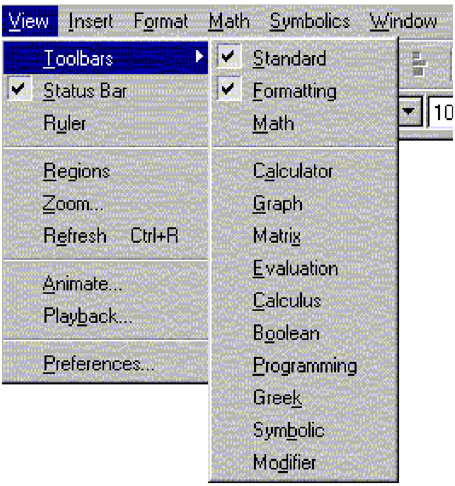


Рис. 2.3. Меню View

· **Ruler** (Линейка) – включить / выключить отображение горизонтальной линейки для точного размещения объектов на странице;

· **Regions** (Области) – выделить белым цветом все области в документе и обеспечить закраску промежутков между ними серым цветом. Команда полезна для определения взаимного расположения областей в документе;

· **Zoom** (Масштаб) – изменить масштаб изображения рабочего документа на экране. Команда выводит диалоговое окно Zoom для выбора масштаба;

· **Refresh** (Обновить) – обновить содержание экрана. При редактировании и перемещении областей в документе могут оставаться искажения. Эта команда строит изображение на экране и устраняет недостатки;

· **Animate** (Анимация) – создать анимацию (оживление) графиков. С помощью этой команды можно, например, исследовать зависимость поведения функции от задаваемого параметра;

· **Playback** (Воспроизведение) – воспроизвести анимацию;

· **Preferences** (Предварительные установки) – установка следующих режимов работы MathCAD: автоматический показ Tip of the Day (Советы дня), Resource Center (Центр ресурсов) при запуске пакета, установка стандартной для Windows раскладки «горячих» клавиш; параметры настройки подключения Internet.

2.4. **Меню Insert (Вставка)**

В MathCAD реализованы различные механизмы помещения в Math-документ матриц, встроенных функций, текстовых и графических областей, рисунков, связанных объектов, что позволяет редактировать их в самом Math-документе. Команды этого меню (рис. 2.4):

· **Graph** (Графики) – построение различных графиков.

Для построения графиков в пакете имеется графический процессор, для построения графиков можно использовать шаблоны, перечень которых приведен на рис. 2.4:

X-Y Plot (График в декартовых координатах) – создать шаблон для построения двухмерного графика в декартовой системе координат;

Polar Plot (График в полярных координатах) – создать шаблон для построения двухмерного графика в полярных координатах;

3D Plot Wizard (Мастер трехмерных графиков) – вызов мастера для построения трехмерных графиков;

Surface Plot (График поверхности) – создать шаблон для построения поверхности в трехмерном пространстве;

Contour Plot (Карта линий уровня) – создать шаблон для контурного графика трехмерной поверхности;

3D Scatter Plot (Точечный график) – создать шаблон для трехмерного графика в виде точек;

3D Bar Plot (Трехмерная гистограмма) – создать шаблон для изображения данных в виде совокупности столбиков в трехмерном пространстве;

Vector Field Plot (Векторное поле) – создать шаблон для отображения векторного поля на плоскости;

· **Matrix** (Матрицы) – создание матрицы (вектора) или изменение размера матрицы (вектора). Ограничение в этой команде – в массиве может быть не более 100 элементов (10 строк и/или 10 столбцов) (MathCAD позволяет работать с матрицами, содержащими до 8 миллионов элементов, если хватает памяти компьютера);

· **Function** (Вставить функцию) – открывается диалоговое окно с перечнем имеющихся встроенных функций;

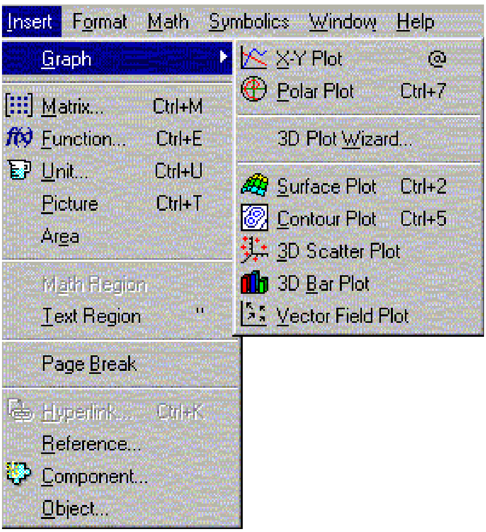


Рис. 2.4. Меню Insert

· **Unit** (Единицы) – вставить единицу измерения различных величин;

· **Picture** (Рисунок) – вставить в документ графический файл с расширением .bmp из других приложений. По этой команде появится значок рисунка с маленьким полем ввода в левом нижнем углу, в котором следует задать имя файла. Импортировать файлы в документ можно и через буфер обмена;

· **Area** (Область) – вставить в MathCAD-документ границы начала и конца области, к которой могут быть применены команды защиты и закрытия, расположенные в меню Format;

· **Math Region** (Математическая область) – вставить в текстовую область математические формулы;

· **Text Region** (Текстовая область) – вставить в документ текстовые комментарии (текстовую область);

· **Page Break** (Разметка страниц) – вставить в документ принудительный разрыв страницы, который изображается в виде сплошной линии;

· **Hiperlink** (Гиперсвязь) – вставить в документ гиперссылку для создания обучающих программ и справочных систем. Для создания гиперссылки нужно создать текстовую область, выделить в ней некоторую область, затем выполнить команду Hiperlink. Появится диалоговое окно Insert Hiperlink (рис. 2.5), в котором следует задать необходимые параметры:

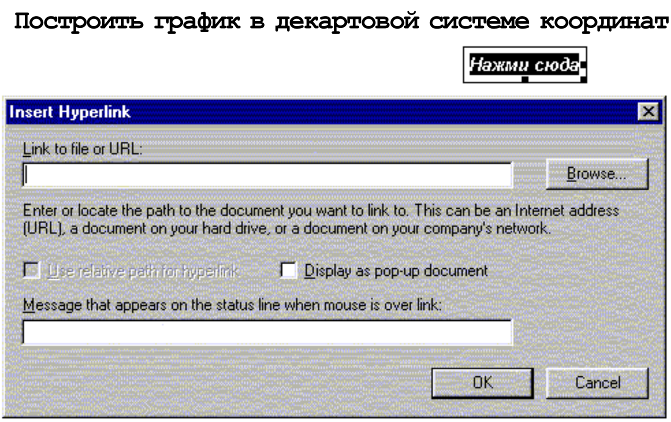


Рис. 2.5. Создание гиперссылки

В верхнем поле ввода указывается имя файла. Если точное имя файла неизвестно, щелчком по кнопке Browse вызываем окно для поиска нужного файла. В нижнее поле ввода можно ввести сообщение, которое будет появляться в строке состояния при помещении указателя мыши на гиперссылку. При установке флажка Display as pop-up document вызываемый документ выводится внутри исходного, в противном случае он заменяет исходный;

· **Reference** (Ссылка) – обращение к заданному файлу путем создания связанного с ним графического объекта – кнопки со стрелкой и именем файла:

· **Component** (Компонента) – вставка в документ с помощью Component Wizard (Мастер компонент) новых компонент (модулей), которые перечислены в диалоговом окне (рис. 2.6):

Рис. 2.6. Окно Component Wizard (Мастер компонент)

· **Object** (Объект) – вставка в документ различных объектов из других Windows-приложений. Эта команда выводит окно с перечислением приложений, с которыми осуществляется объектная связь.

2.5. Меню Format (Формат)

Пользовательский интерфейс MathCAD ориентирован на интерфейс Windows-приложений, и все команды, предназначенные для задания параметров, определяющих внешнее представление чисел, формул, абзацев, колонтитулов и т.д., объединены в пункте Format главного меню (рис. 2.7):

· **Equation (**Уравнения) – задать для переменных, чисел и других символов в математических выражениях параметры шрифта, размера и начертания. Эта команда выводит диалоговое окно Equation Format (Формат уравнения) (рис. 2.8), которое позволяет выбрать объект в математических выражениях: переменные (Variables), константы (Constants) и объекты пользователя (User N, N – номер группы от 1 до 7). Кнопка Modify (Изменить) в диалоговом окне обеспечивает задание нужного шрифта, начертания, размера и цвета (рис. 2.9);

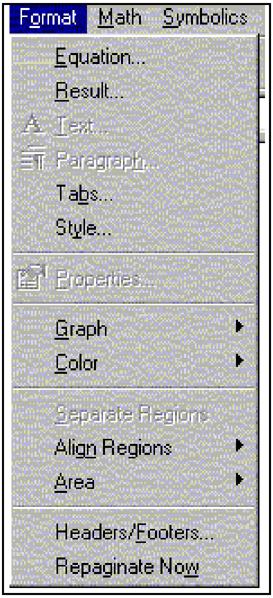


Рис. 2.7. Меню ***Format***

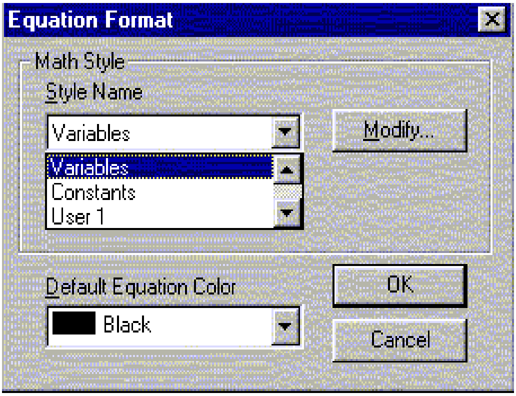


Рис. 2.8. Окно Equation Format

· **Result** (Результат) – задать результаты вычислений в определенном формате. Эта команда выводит диалоговое окно Result Format (Формат результата), в котором имеются четыре вкладки: Number Format (Формат чисел), Display Options (Параметры отображения), Unit Display (Единицы отображения), Tolerance (Допуск).

На вкладке Number Format (рис. 2.10) задают параметры формата представления чисел: General (Общий), Decimal (Десятичный), Scientific (Научный), Engineering (Инженерный). Поле Number of decimal places (Точность отображения десятичных позиций) задает в десятичных числах количество отображаемых знаков после запятой. Поле Exponential threshold (Экспоненциальный порог) задает показатель степени 10, по достижении которого число представляется на экране в экспоненциальной форме: 1.045*10. Опция Show trailing zeros (Показать конечные нули).

На вкладке Display Options можно выбрать систему счисления Radix (Система): Decimal (Десятичная), Binary (Двоичная), Hexadecimal (шестнадцатеричная), Octal (Восьмеричная).

Вкладка Unit Display используется при работе с величинами, имеющими размерность.

Вкладка Tolerance содержит поля: Complex threshold (Комплексный порог), Zero threshold (Нулевой порог).

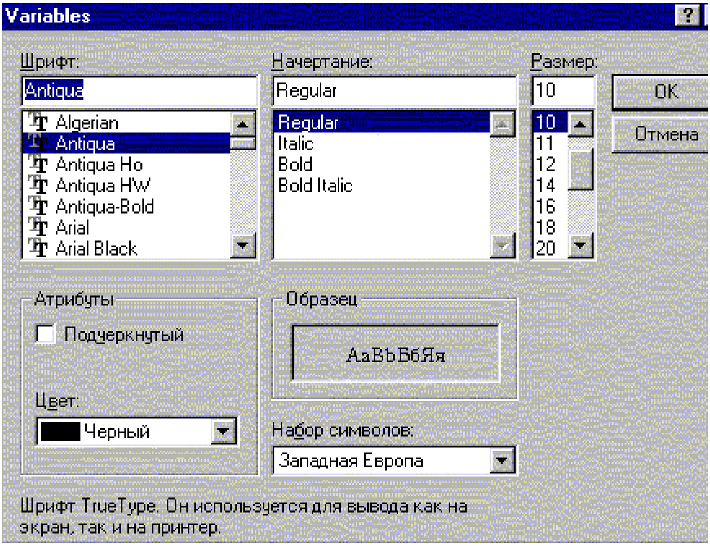


Рис. 2.9. Окно для задания шрифта, размера, начертания, цвета

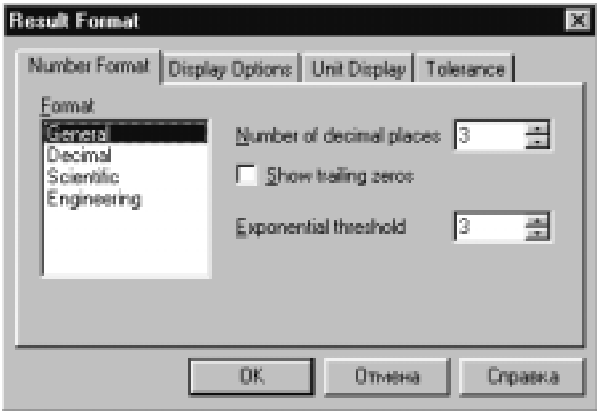


Рис. 2.10. Окно Number Format

· **Text** (Текст) – задать для выделенного текстового фрагмента в текстовой области определенный шрифт, его размер и начертание. При выборе этой команды появляется диалоговое окно Text Format (Формат текста) (рис. 2.11).

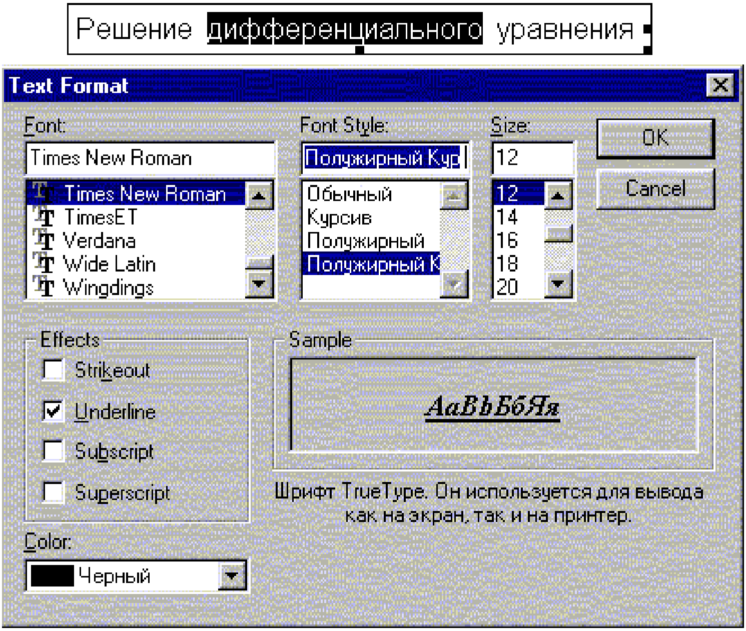


Рис. 2.11. Окно Text Format (Формат текста)

Оно содержит три списка:

Font (Шрифт) – список шрифтов;

Font Style (Стиль) – список начертания шрифтов;

Size (Размер) – список размеров шрифтов.

Имеется ряд флажков в группе Effects (Эффекты):

Strikeout (Зачеркнутый) – перечеркнутые посередине символы;

Underline (Подчеркнутый) – подчеркнутые снизу символы;

Subscript (Подстрочный) – нижний индекс;

Superscript (Надстрочный) – верхний индекс.

В раскрывающемся списке Color (Цвет) можно выбрать нужный цвет для выделенного текстового фрагмента. Поле Sample (Образец) отображает результаты применения установленных параметров. Кнопка OK диалогового окна зафиксирует, а кнопка Cancel отменит сделанный выбор.

· **Paragraph** (Абзац) – форматировать абзац в текстовом блоке. Эта команда выводит диалоговое окно Paragraph Format (Формат абзаца). В группе Indent (Отступы) можно задать отступы. В группе Alignment (Выравнивание) можно выбрать вид выравнивания, в раскрывающемся списке Bullets – форматирование текстовых строк.

· **Tabs** (Табуляция) – задать число позиций, на которое перемещается текстовый курсор с помощью клавиши Tab.

· **Style** (Стиль) – установить стиль для текстовых объектов. Под стилем текстового объекта понимается совокупность параметров шрифта заголовков и основного текста, а также способы взаимного расположения элементов текста.

· **Properties** (Свойства) – задать цветовой фон для выделенного выражения и заключить его в рамку. Включить опцию, позволяющую игнорировать данное выражение при вычислениях.

· **Graph** (Формат графика) – изменить формат построенных графиков. Это подменю содержит следующие команды:

X-Y Plot (Формат двухмерного графика) – изменить график в декартовых координатах;

Polar Plot (Формат полярного графика) – изменить график в полярных координатах;

3D Plot (Формат трехмерного графика) – изменить трехмерный график;

Trace (Трассировка) – чтение координат напрямую из выделенного графика (рис. 2.12);

Zoom... (Увеличение...) – увеличенный просмотр части выделенного графика.

· **Color** (Цвет) – изменить цвет. Это подменю содержит следующие команды:

Background... (Фон...) – выбор цвета фона для всего документа;

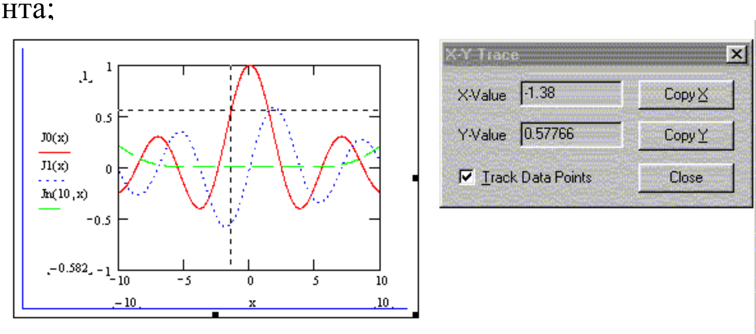


Рис. 2.12. Чтение координаты из графика

Highlight... (Подсветка...) – изменить цвет подсветки выражения (при выборе Format/Properties/Highlight Region);

Annotation... (Комментарий...) – установить цвет подсветки, появляющейся при редактировании электронной книги;

Use Default Palette (Палитра по умолчанию...) – использовать цвета по умолчанию;

Optimize Palette (Оптимизировать палитру...) – использовать оптимальное сочетание цветов для данной системы.

· **Separate Regions (Разделить области)** – автоматически разделять перекрывающиеся области в документе.

· **Align Regions...** (Выравнивание региона...) – выровнять выделенные области. Это подменю имеет команды:

Across (Горизонтально) – выровнять по горизонтали, проходящей между самым верхним и самым нижним регионами документа;

Down (Вертикально) – выровнять по вертикали, проходящей между самым правым и самым левым регионами документа.

· **Area...** (Область...) – создать скрытые и закрытые области в документе, созданные по команде Insert/Area. Это подменю имеет команды:

Lock... (Закрыть область...) – защитить от редактирования выбранную область. Защита может быть с паролем и без пароля;

Unlock... (Открыть область) – разрешить редактирование заблокированной области;

Collapse (Захлопнуть) – захлопнуть текущую область;

Expand (Раскрыть) – раскрыть захлопнутую область.

· **Header/Footers…**(Колонтитулы) – внесение некоторой информации в колонтитулы. При печати документов иногда требуется внести в заголовок (Header) или в нижнюю строку (Footers) каждой страницы документа некоторую информацию, например, имя текущего файла, номер страницы, текущую дату и время, заголовок к размещенной на странице информации. Такие надписи называются колонтитулами.

· **Repaginate Now** (Перенумерация страниц) – разбиение текущего документа на страницы (разрыв страницы не пересекает формулы).

2.6. **Меню Math (Математика)**

Для управления вычислительным процессом в MathCAD имеются следующие команды (рис. 2.13):

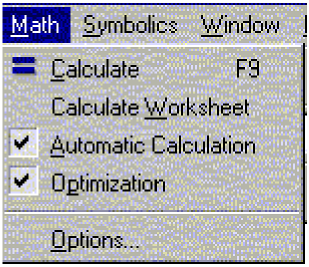


Рис. 2.13. Меню Math (Математика)

· **Calculate** (Вычислить) – провести расчеты по формулам видимой части документа;

· **Calculate Worksheet** (Пересчитать все) – провести расчеты по всем формулам MathCAD-документа;

· **Automatic Calculation** (Автоматическое вычисление) – установить режим автоматического вычисления. Если этот режим включен, то слева от имени команды присутствует значок «галочка» (рис. 2.13);

· **Optimization** (Оптимизация) – переключатель режима оптимизации численных расчетов;

· **Options…** (Параметры) – диалоговое окно, содержащее следующие вкладки (рис. 2.14):

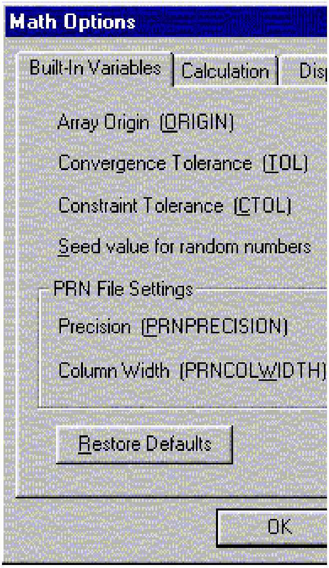


Рис. 2.14. Меню Math Options (Опции)

Built-In variables (Встроенные величины) – изменить значения встроенных величин (приложение 1);

Calculation (Вычисление) – содержит две кнопки, позволяющие включить / выключить режим автоматических вычислений (Recalculate automatically) и оптимизацию выражений перед вычислениями (Optimize expressions before calculating);

Display Unit system (Система единиц...) – изменить систему единиц измерения (по умолчанию задана Международная система СИ);

Dimentions (Единицы измерения...) – изменить название единиц измерения. Например, вы можете переименовать ***кг*** (kg) в ***килограмм*** (kilogram).

2.7. **Меню Symbolics (Символы)**

Команды данного меню используются для символьного вычисления математических выражений. При открытии этого меню часть команд может быть недоступна. Чтобы воспользоваться этими командами, необходимо сначала выделить переменную или выражение, подлежащее обработке (рис. 2.15).

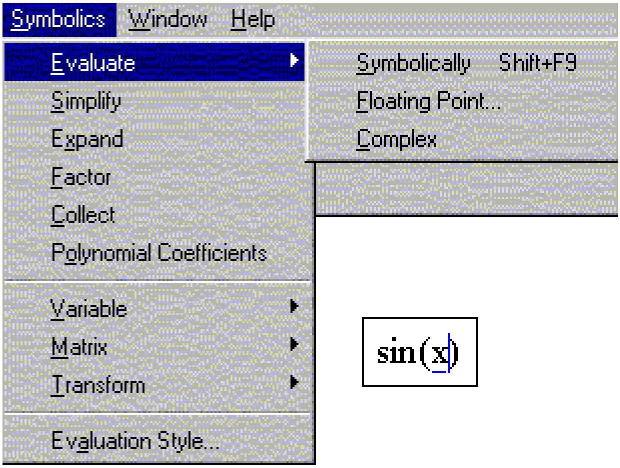


Рис. 2.15

Подменю Evaluate (Вычислить) имеет следующие команды:

· **Symbolically** (Вычислить в символах) – служит для символьного вычисления интегралов, аналитического дифференцирования, вычисления суммы или произведения. Перед выбором данной команды необходимо поместить голубой курсор на вычисляемое выражение;

· **Floating Point...** (С плавающей точкой…) – эта команда заменяет константы в результатах символьных вычислений численными значениями с заданным количеством знаков после запятой;

· **Complex** (В комплексном виде) – преобразование выражения к комплексному виду.

Команды:

· **Simplify** (Упростить) – упростить выделенное выражение, выполняя арифметические действия, сокращая подобные слагаемые, приводя к общему знаменателю и используя основные тригонометрические тождества;

· **Expand** (Разложить по степеням) – представить выражение в виде суммы отдельных членов;

· **Factor** (Разложить на множители) – привести подобные члены и разложить на множители;

· **Collect** (Разложить по подвыражению) – упорядочить выражение по выделенной переменной или функции. Результатом будет выражение, полиномиальное относительно выбранного выражения;

· **Polynomial Coefficients** (Полиномиальные коэффициенты) – служит для нахождения коэффициентов полинома.

· Подменю Variable (Переменные) имеет следующие команды:

· **Solve** (Решить относительно переменной**)** – решение уравнения или неравенства символьно относительно выделенной переменной;

· **Substitute** (Заменить переменную) – заменить выделенную переменную во всем выражении содержимым Буфера обмена. Для использования этой команды прежде следует поместить в Буфер обмена выражение, которое будет подставлено вместо выделенной переменной. Затем выделяют переменную в каком-либо месте выражения и выполняют эту команду;

· **Differentiate** (Дифференцировать по переменной) –вычислять символьно производную по выделенной переменной. Остальные переменные в выражении рассматриваются как константы;

· **Integrate** (Интегрировать по переменной) – нахождение неопределенного интеграла относительно выделенной переменной, причем первообразная отображается без произвольной постоянной;

· **Expand to Series...** (Разложить в ряд...) – найти несколько членов разложения выражения в ряд Тейлора по выделенной переменной. Диалоговое окно позволяет выбрать количество членов разложения;

· **Convert to Partial Fraction** (Разложить на элементарные дроби) – разложить на элементарные дроби выражение, которое рассматривается как рациональная дробь относительно выделенной переменной.

Подменю Matrix (Матричные операции) содержит команды для работы с матрицами:

· **Transpose** (Транспонировать) – найти транспонированную матрицу для выделенной матрицы;

· **Invert** (Обратить) – найти обратную матрицу для выделенной матрицы;

· **Determinant** (Определитель) – вычислить определитель выделенной матрицы.

Подменю Transform (Преобразования) содержит следующие команды:

· **Fourier (Преобразование Фурье)** – вычислять преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

· **Inverse Fourier (Обратное преобразование Фурье)** – вычислить обратное преобразование Фурье относительно выделенной переменной. Результат – функция от переменной t;

· **Laplace (Преобразование Лапласа)** – вычислить преобразование Лапласа относительно выделенной переменной. Результат – функция от переменной s;

· **Inverse Laplace (Обратное преобразование Лапласа)** – вычислить обратное преобразование Лапласа относительно выделенной переменной. Результат – функция от переменной t;

· **Z (z-преобразование)** – вычислить z-преобразование выражения относительно выделенной переменной. Результат – функция от переменной z;

· **Inverse Z (Обратное z-преобразование)** – вычислить обратное z-преобразование относительно выделенной переменной. Результат – функция от переменной n.

Команда **Evaluation Style… (Стиль результата...)** позволяет выбирать способ отображения результата символьного преобразования, задать отображение комментариев, вертикальное либо горизонтальное размещение по отношению к преобразуемому выражению. В результате выполнения этой команды появляется диалоговое окно Evaluation Style (Стиль вычислений) (рис. 2.16).

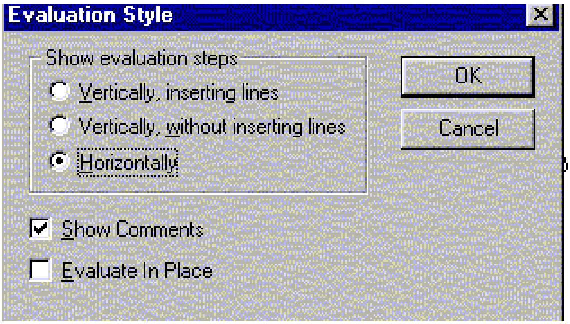


Рис. 2.16 . Диалоговое окно Evaluation Style (Стиль вычислений)

Выбор режима Vertically, inserting lines (Вертикально, вставка строк) обеспечивает вывод результатов вычислений в новой строке, что позволяет избежать наложения областей. Режим **Horizontally** (Горизонтально) размещает результаты вычислений справа от вычисляемого выражения. Результаты символьных вычислений можно снабжать текстовыми комментариями. Например, команда **Symbolically** (Вычислить в символах) подменю Evaluate (Вычислить) добавляет комментарий yields (в итоге имеем), а команда **Integrate** (Интегрировать по переменной) подменю **Variable** (Переменные) добавляет комментарий by integration, yields (в результате интегрирования имеем). Для отображения комментария следует включить опцию Show Comments (Показать комментарии). В целях удобочитаемости документа не следует устанавливать опцию Evaluate In Place (Вычислить на месте).

2.8. **Меню Window (Окно)**

MathCAD позволяет одновременно работать с несколькими документами. Каждому документу отводится собственное окно. Окно, с которым работает пользователь, называется активным. Окна других документов не видны, но в них можно перейти в любой момент. В меню Window приведены команды для работы с окнами (рис. 2.17):

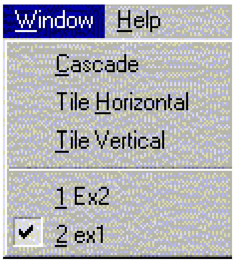


Рис. 2.17. Окно меню Window

· **Cascade** (Каскад) – расположить окна документов друг за другом так, чтобы были видны заголовки окон;

· **Tile Horizontal** (По горизонтали) – расположить окна документов горизонтально так, чтобы они не перекрывались;

· **Tile Vertical** (По вертикали) – расположить окна документов вертикально так, чтобы они не перекрывались.

Кроме того, в меню Window имеется список документов, с которыми работает пользователь, что позволяет быстро перейти в окно заданного документа.

2.9. **Меню Help (Справка)**

В меню Help (Справка) расположены информационные ресурсы MathCAD. Меню Help содержит следующие команды (рис. 2.18):

· **Mathcad help** (Техническая поддержка...) – вызвать справочную систему пакета;

· **Resource Center** (Центр ресурсов) – открыть доступ к центру информационных ресурсов, объединяющему в себе справочную систему, обучающую систему, многочисленные примеры, предоставляющему выход в Internet;

· **Tip of the Day…** (Совет дня) – вызвать оперативную подсказку;

· **Open Book...** (Открыть книгу...) – открыть электронную книгу;

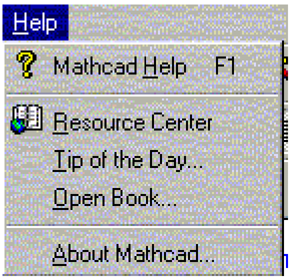


Рис. 2.18. Окно меню Help

· **About MathCAD...** (О программе...) – вывести краткую информацию о математической системе MathCAD.

3. **Панели инструментов Standard (Стандартная) и Formatting (Форматирование)**

Все современные Windows-приложения имеют стандартную панель инструментов, которая позволяет выполнять наиболее часто используемые команды щелчком по соответствующей пиктограмме (кнопке). Благодаря этому становится ненужным утомительный поиск в меню наиболее часто используемых команд, которые к тому же часто бывают представлены неявно. В некоторых Windows-приложениях, например, в Microsoft Word, существует возможность дополнять панель инструментов пиктограммами команд, необходимыми пользователю. Данная возможность, к сожалению, отсутствует в MathCAD. Установив указатель мыши на пиктограмму, можно увидеть подсказку с названием функции, закрепленной за этой кнопкой. Панель инструментов можно поместить в любое место экрана либо закрыть.

В MathCAD третья строка окна – панель инструментов **Standard** (Стандартная) (рис. 3.1).

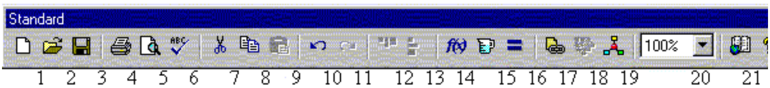


Рис. 3.1. Панель инструментов Standard (Стандартная)

Пиктограммы панели инструментов **Standard** (Стандартная) и соответствующие им команды представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Пикто-грамма	**Команда меню**	**Действие**
1	**2**	**3**
1	**New** (Новый)	Создать новый документ
2	**Open** (Открыть)	Открыть ранее созданный документ
3	**Save** (Сохранить)	Сохранить текущий документ с его именем
4	**Print** (Печать)	Печать документа
5	**Print Preview** (Предварительный просмотр)	Предварительный просмотр документа перед печатью

1	2	3
6	**Check Spelling** (Орфография)	Проверить орфографию
7	**Cut** (Вырезать)	Вырезать из документа и сохранить в буфере обмена выделенный фрагмент
8	**Copy** (Копировать)	Копировать в буфер выделенный фрагмент документа
9	**Paste** (Вставить)	Вставить в документ содержимое буфера
10	**Undo** (Отмена)	Отменить последнее изменение документа
11	**Redo** (Возврат)	Повторно выполнить отмену изменений
12	**Align Across** (Выровнять по горизонтали)	Выравнивание областей по горизонтали
13	**Align Down** (Выровнять по вертикали)	Выравнивание областей по вертикали
14	**Insert Function** (Вставить функцию)	Вставить встроенную функцию
15	**Insert Unit** (Вставить единицу измерения)	Вставить единицу измерения
16	**Calculate** (Вычислить)	Выполнить вычисления
17	**Insert Hyperlink** **(**Вставить гиперссылку)	Вставить гиперссылку на файл Internet или локальный файл
18	**Insert Component** (Вставить компонент)	Вставить OLE-объект
19	**Run MathConnex** (Запустить систему	Запустить на выполнение систему **MathConnex**

Четвертая строка окна содержит панель инструментов **Formatting** (Форматирование) (рис. 3.2). Кнопки этой панели содержат наиболее часто используемые режимы управления шрифтом, абзацем, списком:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Рис. 3.2 Панель инструментов форматирования

1) поле отображает название текущего стиля текстовых блоков, кнопка позволяет раскрыть список доступных стилей;

2) поле отображает название текущего шрифта, кнопка позволяет раскрыть список доступных шрифтов;

3) поле отображает текущий размер символов, кнопка раскрывает список доступных размеров символов;

4) кнопка включения / выключения полужирного (Bold) начертания символов;

5) кнопка включения / выключения наклонного (Italic) начертания символов;

6) кнопка включения / выключения подчеркнутого (Underline) начертания символов;

7) кнопка выравнивания текста (Align Left) по левой границе;

8) кнопка выравнивания текста (Align Center) по центру;

9) кнопка выравнивание текста (Align Right) по правой границе;

10) кнопка создания маркированного (Bullets) списка;

11) кнопка создания нумерованного (Numbering) списка.

Все эти операции форматирования используются в текстовом редакторе Word.

4. **Панель инструментов Math (Математика)**

Панель инструментов **Math** (Математика) содержит кнопки для отображения следующих панелей инструментов: **Calculator** (Калькулятор)**, Graph** (График), **Matrix** (Матрицы), Evaluation (Вычисления), **Calculus** (Исчисление), **Boolean** (Булева)**, Programming** (Программирование), **Greek** (Греческий алфавит), **Symbolic** (Символы) (рис 1.3).

· **Calculator** (Калькулятор) – это арифметическая панель, содержащая кнопки задания всех основных вычислительных операций, цифр и некоторых элементарных функций, которые можно найти на клавиатуре микрокалькулятора (рис. 4.1).

*Рис. 4.1. Панель инструментов **Calculator** (Калькулятор)*

· **Graph** (График) – это панель, содержащая кнопки для построения двух- и трехмерных графиков (рис. 4.2).

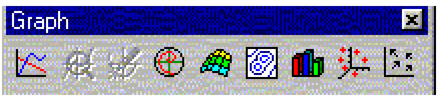


*Рис. 4.2. Панель инструментов **Graph** (График)*

Matrix (Матрицы) – матричная панель, содержащая кнопки для создания и выполнения некоторых операций с векторами и матрицами (рис. 4.3).

*Рис. 4.3. Панель инструментов **Matrix** (Матрицы)*

· **Evaluation** (Вычисления) – эта панель предназначена для ввода различных знаков присваивания, а также для задания собственных операторов (рис. 4.4).

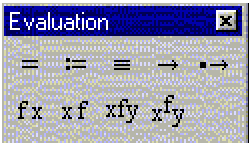


*Рис. 4.4. Панель инструментов **Evaluation** (Вычисления)*

· **Calculus** (Исчисление) – эта панель содержит кнопки для задания операторов дифференцирования, интегрирования, вычисления сумм, произведений и пределов (рис. 4.5).

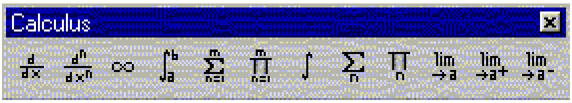


*Рис. 4.5. Панель инструментов **Calculus** (Исчисление)*

· **Boolean** (Булева) – это панель, содержащая кнопки задания логических операторов сравнения (рис. 4.6).

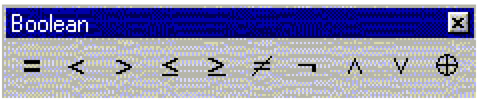


*Рис. 4.6. Панель инструментов **Boolean** (Булева)*

· **Programming** (Программирование) – эта панель содержит кнопки для задания команд программирования (рис. 4.7).

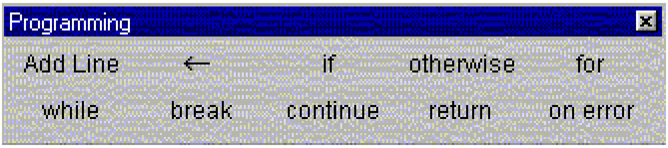


*Рис. 4.7. Панель инструментов **Programming** (Программирование)*

· **Greek** (Греческий алфавит) – кнопки этой панели предназначены для ввода греческих букв (рис. 4.8).

*Рис. 4.8. Панель инструментов **Greek** (Греческий алфавит)*

· **Symbolic** (Символы) – эта панель содержит кнопки для выполнения различных символьных вычислений (рис. 4.9).

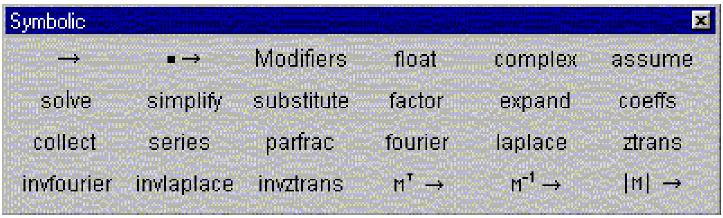


*Рис. 4.9. Панель инструментов **Symbolic** (Символы)*

5. **Входной язык MathCAD 2000**

Общение пользователя с MathCAD осуществляется на математически ориентированном входном языке.

Алфавит входного языка – это совокупность слов и символов, которые используются для задания команд и функций. Алфавит языка содержит:

· латинские и греческие буквы;

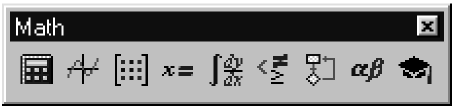
· арабские цифры;

· системные переменные (см. приложение 1);

· специальные знаки и знаки-операторы;

· имена встроенных функций.

К укрупненным элементам языка относятся типы данных, операторы, встроенные функции, функции пользователя, процедуры и управляющие структуры. Кроме этого, все, что находится в математической панели Math, также относится к алфавиту пакета.



К типу данных в пакете относятся константы, переменные, массивы (матрицы и векторы), файлы данных.

5.1. **Константы**

В пакете имеются следующие типы данных:

· целочисленные константы (2, -285, 521);

· вещественные числа с мантиссой и порядком ($5.6784 * 10^4$);

· комплексные числа (1.5 + i*3);

· системные константы (e, π);

· строковые константы («матрица», «12345»);

· единицы измерения физических величин (при необходимости MathCAD выполняет расчеты физических величин с преобразованием их размерности).

MathCAD производит всевозможные математические операции с константами (панель ***Calculator***) и символьными переменными, причем символьные вычисления могут быть выполнены двумя способами:

· с помощью команд меню ***Symbolics;***

· с помощью операторов панели инструментов ***Symbolic***, входящей в математическую панель ***Math***.

Для вычисления численного выражения с помощью панели ***Calculator*** вводят выражение и в конце введенного выражения ставят знак = . Количество десятичных знаков, выводимых в числе после запятой, устанавливают с помощью команды Number of decimal places, расположенной в меню Format/Result/Number Format.

Пример 5.1. Вычисление числовых выражений

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}} = 0.707107\ ,$$

$$\frac{\left(\pi + 0.625 + \frac{1}{8} + 2^3\right)\cdot(0.5 - i\cdot 0.6)}{e + i\cdot e^{-1}} = 1.799155 - 2.868293i.$$

Для символьного вычисления с помощью команд меню ***Symbolics*** вводят выражение, выделяют его при помощи курсора, затем из меню ***Symbolics*** выбирают подменю ***Evaluate*** и команду ***Symbolically*** (пример 5.2.1). Если же из подменю выбрать команду ***Floating Point***, то конечный результат будет представлен в виде числа с плавающей точкой (пример 5.2.2). Для символьного вычисления выражений с радикалами нужно использовать команду ***Factor*** из меню ***Symbolic*** (пример 5.2.3).

Пример 5.2. Символьное вычисление числовых выражений с помощью команд меню ***Symbolics.***

1. $\frac{25}{12} + 2^{-4} + \frac{13}{4}$ yields $\frac{259}{48}$

2. $\frac{25}{12} + 2^{-4} + \frac{13}{4} + \pi$ floating point evaluation yields 8.53742

3. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}}$ by factoring, yields $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

Ниже приведены результаты символьных вычислений с помощью команд панели ***Symbolic***, входящей в Math.

Пример 5.3. Символьные вычисления с помощью команд панели ***Symbolic.***

1. $\frac{25}{12} + 2^{-4} + \frac{13}{4} \to \frac{259}{48}$

2. $\left(\frac{25}{12} + 2^{-4} + \frac{13}{4} + \pi\right)\text{float} \to 8.5374259869231265718$

3. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2}-1}}}\ \text{factor} \to \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

5.2. **Переменные**

Для задания переменной нужно указать её имя, которое называется идентификатором. Имена (идентификаторы) могут иметь любую длину и состоять из букв латинского и греческого алфавитов, арабских цифр, однако, первой должна быть буква. Имена переменных не должны совпадать с именами встроенных функций и системных переменных. Чтобы присвоить переменной значение, нужно набрать её имя, щелкнуть по пиктограмме оператора присваивания **:=** на панели ***Calculator*** и ввести численное значение либо математическое выражение. Если переменной присвоено значение с помощью оператора **:=**, то такая переменная называется *локальной*. Если переменной присвоено значение с помощью оператора ≡ (панель ***Evaluation***), то такая переменная называется *глобальной*.

Пример 5.4. Задание переменных

$a := 4.5 \qquad b := \pi \qquad c := \dfrac{21}{8} \qquad d \equiv 5.76 \cdot e$

$m := \dfrac{a \cdot b}{c} \cdot d \qquad m = 84.323776$

Переменная может быть размерной, то есть характеризоваться как физическая величина. Для задания размерности переменной после ввода численного значения надо набрать знак умножения и физическую единицу измерения, которую можно выбрать на панели инструментов либо по команде ***Units*** в меню ***Insert***. В процессе вычислений отслеживается соответствие размерных величин и выдается сообщение об ошибке в случае его нарушения.

Пример 5.5. Вычисление скорости

$s := 150 \cdot km$ – пройденное расстояние

$t := 1.25 \cdot hr$ – затраченное время

$v := \dfrac{s}{t}$ – скорость $\qquad v = 33.333 m s^{-1}$

Ранжированная переменная – это переменная, которая задается выражением:

имя переменной := N1 [, N1 + Step] .. N2,

где N1 – начальное значение переменной, N2 – конечное значение, Step – шаг изменения. Если выражение в квадратных скобках отсутствует и N1 < N2, то шаг изменения равен 1, в противном случае шаг равен Step. Задание ранжированной переменной эквивалентно заданию конечного цикла.

Пример 5.6. Задание и вывод ранжированных переменных

$a := 1..5 \qquad b := -5..-1 \qquad c := -5, -4.5..-3$

a =	b =	c =
1	-5	-5
2	-4	-4.5
3	-3	-4
4	-2	-3.5
5	-1	-3

5.3. **Векторы, матрицы**

Одномерный массив чисел либо символов называется вектором, а двухмерный – матрицей. Для создания массивов можно воспользоваться командой **Matrix** меню **Insert** или панелью **Matrix**:

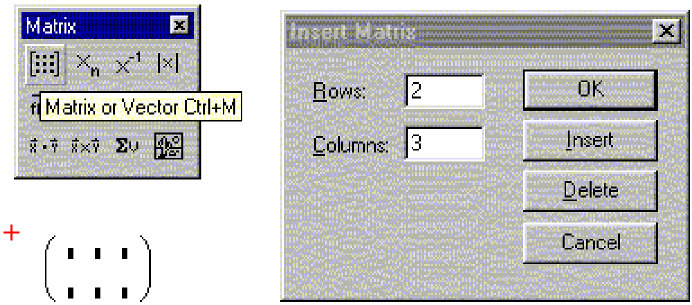


Рис. 5.1. Создание векторов и матриц

В диалоговом окне Insert Matrix нужно указать размер матрицы, задав количество строк (Rows) и столбцов (Columns). Если параметр Rows равен 1, то будет задаваться вектор-строка, если параметр Columns равен 1, то будет задаваться вектор-столбец. После задания размеров вектора либо матрицы следует щелкнуть по кнопке ОК либо Insert, и в документе появится шаблон массива, который нужно заполнить данными.

Пример 5.7. Создание векторов и матриц

$(2 \quad 4 \quad 6)$ – вектор-строка

$\begin{pmatrix} a \\ b + c \\ d \end{pmatrix}$ – вектор-строка

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -42 & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$ – матрица

Матрицы и векторы можно конструировать и с помощью ранжированных переменных, только надо помнить, что системная переменная ORIGIN, определяющая индекс первого элемента массива, по умолчанию принимает значение 0.

Пример 5.8. Построение векторов и матриц с помощью ранжированной переменной

1. $i := 1 .. 3$ – ранжированная переменная

$v_i := i^2 + 5$ – вычисление i-го элемента вектора

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 14 \\ 24 \end{pmatrix}$ – построенный вектор, элемент вектора с индексом 0 равен 0

2. ORIGIN := 1 – задание индексации элементов с 1

$i := 1..3$ $\qquad v1_i := i^2 + 5 \cdot i$

$v1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 24 \end{pmatrix}$ – построенный вектор, элемент вектора с индексом 1 вычислен по вышеприведенной формуле

3. $i := 1..2$ $\qquad j := 1$ $\qquad m_{i,j} := i + j$

$m = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ – построенная матрица

5.4. **Операторы**

Операторы – элементы языка для создания математических выражений с использованием данных.

Арифметические операторы предназначены для выполнения действий над числовыми величинами и создания математических выражений. Эти операторы находятся в математической панели **Calculator.**

Операторы отношений предназначены для сравнения двух величин, как правило, используются совместно с условными функциями. Они расположены в панели **Boolean.**

Логические операторы находятся во второй строке панели **Boolean.**

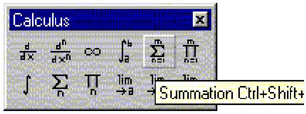
Расширенные операторы предназначены для вычисления сумм, произведений, пределов, производных, интегралов и находятся в панели **Calculus**. Применение расширенных операторов облегчает решение многих математических задач. После вызова расширенного оператора в документе появится шаблон, который нужно заполнить числами или символами.

Эти операторы можно использовать как в числовых, так и в символьных вычислениях.

Используя возможности MathCAD, можно создавать пользовательские операторы.

Пример 5.9. Вычисление конечной суммы

$$\sum_{k=\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare$$ — шаблон для вычисления конечной суммы



$$\sum_{k=1}^{10} \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{k\cdot k} = 21.88644$$ — заполненный шаблон и вычисленная конечная сумма

5.5. **Встроенные функции и функции пользователя**

Пакет имеет большое количество встроенных функций. Если обратиться к функции по имени с указанием соответствующих аргументов, то в результате вычислений будет получено некоторое значение.

Все встроенные функции в окне Insert Function (Вставить Функцию) (рис. 5.2)

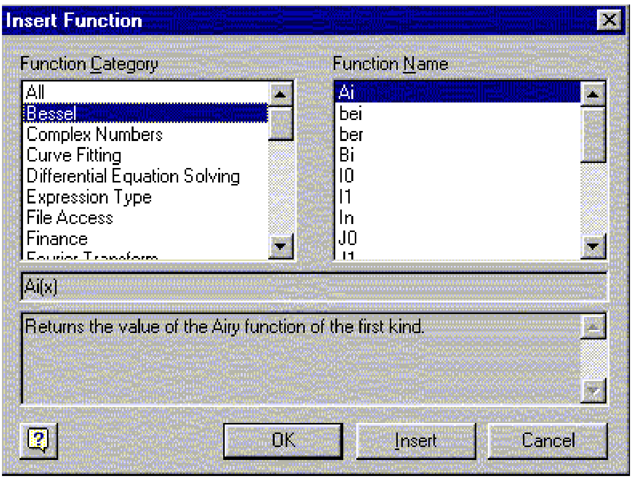


Рис. 5.2. Окно Insert Function (Вставить Функцию)

разделены на категории, что существенно облегчает поиск нужной встроенной функции. Ниже перечислены категории встроенных функций и имена встроенных функций в каждой категории:

1. Функции Бесселя (Bessel):
Ai(x), bei(n, x), ber(n, x), Bi(x), I0(x), I1(x), In(m, x), J0(x), J1(x), Jn(m, x), js(n, x), K0(x), K1(x), Kn(m, x), Y0(x), Y1(x), Yn(m, x), ys(n, x).

2. Функции комплексных чисел (Complex Numbers):
arg(z), csgn(z), Im(z), Re(z), signum(z).

3. Функции сглаживания (Curve Fitting):
expfit(vx, vy, vg), genfit(vx, vy, vg, F), lgsfit(vx, vy, vg, F), line(vx, vy), linfit(vx, vy, F), logfit(vx, vy), medfit(vx, vy), pwrfit(vx, vy, vg), sinfit(vx, vy, vg).

4. Функции решения дифференциальных уравнений и систем (задача Коши, краевая задача, уравнения в частных производных) (Differential Equation Solving):
Bulstoer(y, x1, x2, npoints, D), bulstoer(y, x1, x2, acc, D, kmax, save), bvalfit(v1, v2, x1, x2, xf, D, load1, load2, score), multigrid(M, ncycle), odesolve(x, b [, step]), relax(A, B, C, D, E, F, U, rjac), Rkadapt(y, x1, x2, npoints, D), rkadapt(y, x1, x2, acc, D, kmax, save), rkfixed(y, x1, x2, npoints, D), sbval(v, x1, x2, D, load, score), Stiffb(y, x1, x2, npoints, D, J), stiffb(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save), Stiffr(y, x1, x2, npoints, D, J), stiffr(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save).

5. Функции контроля переменных (Expression Type):
IsArray(x), IsScalar(x), IsString(x), UnisOf(x).

6. Функции работы с файлами (File Access):
APPENDPRN(file), LoadColormap(file), READ_BLUE(file), READ_GREEN(file), READ_HLS(file), READ_HLS_HUE(file), READ_HLS_LIGHT(file), READ_HLS_SAT(file), READ_HSV(file), READ_HSV_HUE(file), READ_HSV_SAT(file), READ_HSV_VALUE(file), READ_IMAGE(file), READ_RED(file), READBMP(file), READPRN(file), READRGB(file), SaveColormap(file, M), WRITE_HLS(file), WRITE_HSV(file), WRITEBMP(file), WRITEPRN(file), WRITERGB(file).

7. Финансово – экономические функции (Finance):
cnper(rate, pv, fv), crate(nper, pv, fv), cumint(rate, nper, pv, start, end [,type]), cumprn(rate, nper, pv, start, end [,type]), eff(rate, nper), fv(rate,nper,pmt [,[pv], [type]]), fvadj(prin, v), fvc(rate, v), ipmt(rate, per, nper, pv[,[pv], [type]]), irr(v, [guess]), mirr(v, fin_rate, rein_rate), nom(rate, nper), nper(rate, pmt,pv[,[fv], [type]]), npv(rate, v), pmt(rate, nper, pv[,[fv], [type]]), ppmt(rate, per, nper, pv[,[fv], [type]]), pv(rate, nper, pmt, nper, pv[,[fv], [type]]), rate (nper, pmt, pv [[fv], [type], [guess]].

8. Функции преобразования Фурье (Fourier Transform):
CFFT(A), cfft(A), FFT(v), fft(v), ICFFT(A), icfft(A), IFFT(v) и ifft(v).

9. Графические функции (Graph):
Polyhedron(S), PolyLookup(n).

10. Гиперболические функции (Hyperbolic):
asinh(z), acosh(z), atanh(z), acoth(z), asech(z), acsch(z), sinh(z), cosh(z), tanh(z), csch(z), sech(z), coth(z).

11. Функции обработки образов (Image Processing) (см. функции работы с файлами).

12. Функции интерполяции и аппроксимации (Interpolation and Prediction):
bspline(vx, vy, u, n), cspline(Mxy, Mz), interp(vs, Mxy, Mz, v), linterp(vx, vy, x), lspline(Mxy, Mz), predict(v, m, n), pspline(Mxy, Mz).

13. Логарифмические и экспоненциальные функции (Log and Exponential) :
exp(z), ln(z), log(z, [b]).

14. Функции теории чисел и комбинаторики (Numbers Theory / Combinatorics):
combin(n, k), gcd(A), lcm(A), mod(n, k), peremut(n, k).

15. Функции ступенек и условия (Piecewise Continuous):
antisymmetric tensor(i, j, k), heaviside step(x), if(cond, x, y), kronecker delta(x, y), sign(x).

16. Функции плотности вероятности (Probably Density):
dbeta(x, s1, s2), dbinom(k, n, p), dcauchy(x, l, s), dchisq(x, d), dexp(x, r), dF(x, d1, d2), dgamma(x, s), dgeom(k, p), dhypergeom(m, a, b, n), dlnorm(x, mu, sigma), dlogis(x, l, s), dnbinom(k, n, p), dnorm(x, mu, sigma), dpois(k, l), dt(x, d), dunif(x, a, b), dweibull(x, s).

17. Функции распределения вероятности (Probably Distribution):
cnorm(x), pbeta(x, s1, s2), pbinom(k, n, p), pcauchy(x, l, s), pchisq(x, d), pexp(x, r), pF(x, d1, d2), pgamma(x, s), pgeom(k, p), phypergeom(m, a, b, n), plnorm(x, mu, sigma), plogis(x, l, s), pnbinom(k, n, p), pnorm(x, mu, sigma), ppois(k, l), pt(x, d), punif(x, a, b), pweibull(x, s) и функции плотности вероятности.

18. Функции случайных чисел (Random Numbers):
rbeta(m, s1, s2), rbinom(m, n, p), rcauchy(m, l, s), rchisq(m, d), rexp(m, r), rF(m, d1, d2), rgamma(m, s), rgeom(m, p), rhypergeom(m, a, b, n), rlnorm(m, mu, sigma), rlogis(m, l, s), rnbinom(m, n, p), rnd(x), rnorm(m, mu, sigma), rpois(m, l), rt(m, d), runif(m, a, b), rweibull(m, s).

19. Функции регрессии и сглаживания (Regression and Smoothing):
genfit(vx, vy, vg, F), intercept(vx, vy), ksmooth(vx, vy, b), linfit(vx, vy, F), loess(Mx, My, span), medsmooth(vy, n), regress(Mx, vy, n), slope(vx, vy), stderr(vx, vy),supsmooth(vx, vy) и функции группы 3.

20. Функции решения алгебраических уравнений и систем, а также функции оптимизации (Solving):
find(var1, var2,...), lsolve(M, v), maximize(f, var1, var2,...), minerr(var1, var2,...), minimize(f, var1, var2,...), polyroots(v), root(f(var), var).

21. Функции сортировки (Sorting):
csort(A, j), reverse(A), rsort(A, j), sort(v).

22. Специальные функции (Special):
erf(z), erfc(x), fhyper(a, b, c, x), Gamma(a, z), Her(n, x), ibeta(a, x, y), Jac(n, a, b, x), Lag(n, x), Leg(n, x), mhyper(a, b, x), Tcheb(n, x), Ucheb(n, x).

23. Статистические функции (Statistics):
corr(A, B), cvar(A,B), gmean, hist, hmean(A), kurt, mean(A), median(A), skew(A,B,C,...), stderr, stdev(A), Stdev(A), var(A), Var(A).

24. Текстовые функции (String):
concat(S1, S2, S3,...), strlen(S), search(S, SubS, m), substr(S, m, n), str2num(S), num2str(z), str2vec(S), vec2str(v).

25. Тригонометрические функции (Trigonometric):
acos(z), acot(z0, acsc(z), angle(x, y), asec(z), asin(z), atan(z), atan2(z), cos(z), cot(z), csc(z), sec(z), sin(z), tan (z).

26. Функции округления и работы с частью числа (Truncation and Round-Off):
ceil(x), floor(x), round(x, n) и trunc(x).

27. Функции пользователя (User defined):
Kronecker(m,n), Psi(z).

28. Функции работы с векторами и матрицами (Vector and Matrix):
augment(A, B), cholesky(M), cols(A), cond1(M), cond2(M), conde(M), condi(M), diag(v), eigenvals(M), eigenvec(M, z), eigenvecs(M), geninv(A), genvals(M, N), genvecs(M, N), identity(n), last(v), lenght(v), lu(M), matrix(m, n, f), max(A), min(A), norm1(M), norm2(M), norme(M), normi(M), qr(A), rank(A), rows(A), rref(A), stack(A, B), submatrix(A, ir, jr, ic, jc), svd(A), svds(A) и tr(M).

29. Функции волнового преобразования (Wavelet Transform):
iwave(v) и wave(v).

Несмотря на большое количество встроенных функций, у пользователя часто возникает необходимость создать свою функцию. Функция пользователя создается следующим образом:

Имя функции (Список аргументов) : = Выражение.

Имя функции – идентификатор, как и имя переменной. В скобках указывается список аргументов, используемых в выражении, перечисленных через запятую. Выражение – это конструкция, содержащая операторы, типы данных и встроенные функции.

Пример 5.10. Вычислить площадь треугольника по формуле Герона, создав функцию пользователя для вычисления полупериметра и площади

$$p(a,b,c) := \frac{(a+b+c)}{2}$$ – полупериметр треугольника

$$S(a,b,c) := \sqrt{p(a,b,c)\cdot(p(a,b,c)-a)\cdot(p(a,b,c)-b)\cdot(p(a,b,c)}$$

Полупериметр и площадь треугольника со сторонами
$a = 3,\ b = 4,\ c = 6$
$p(3,4,6) = 6.5 \qquad S(3,4,6) = 5.333.$

6. **Построение двухмерных графиков**

6.1. **Построение графиков функций вида** $y = f(x)$

Для построения двухмерных графиков в декартовой системе координат нужно выбрать шаблон двухмерного графика по команде X-Y Plot из меню **Insert/Graph**. В рабочем поле появится незаполненный шаблон в виде прямоугольника с двумя темными маленькими прямоугольниками по каждой оси (рис. 6.1).

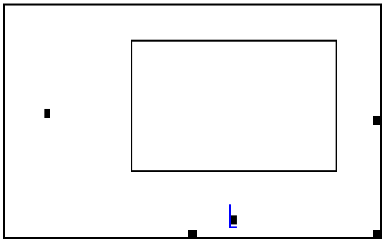


Рис. 6.1. Шаблон двухмерного графика

Маленький темный прямоугольник под горизонтальной осью определяет позицию для ввода имени независимой переменной. По вертикальной оси в этой позиции вводится имя функции, график которой нужно построить. Если на одном и том же графике необходимо построить несколько функций, то их имена перечисляются через запятую в вышеуказанной позиции.

После ввода независимой переменной, например, x, появятся темные маленькие прямоугольники по обе стороны от переменной x (рис. 6.2). Эти прямоугольники служат для указания позиции ввода границ значений по оси абсцисс, в пределах которых будет построен график. Если эти поля не заданы, то они автоматически заполнятся значениями от -10 до 10.

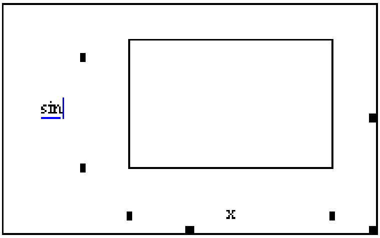


Рис. 6.2. Заполнение шаблона

Щелкнув левой кнопкой мыши по темному прямоугольнику по вертикальной оси и задав функцию, график которой нужно нарисовать, в позиции, определенной темными маленькими прямоугольниками по обе стороны от имени функции, следует ввести значения для указания диапазона изменения функции. После щелчка левой кнопкой мыши вне графической области график функции будет построен.

Пример 6.1. Построить график функции $y = \sin 2x$ без указания и с указанием диапазонов изменения независимой переменной и функции.

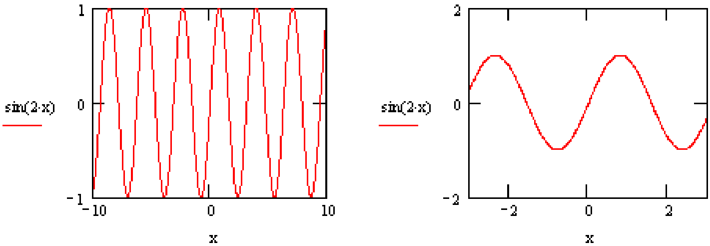


Рис. 6.3. Построение графика $y = \sin 2x$

При построении графика можно использовать ранжированную переменную для задания диапазона изменения аргумента. На одном графике строить несколько кривых.

Пример 6.2. Построить графики функций $y = 0.75\cos x$, $y = 0.25\sin 3x$, $y = \cos^3 x$ при изменении независимой переменной от – 4 до 4.

$y(x) := 0.75 \cdot \cos(x) \quad y1(x) := 0.25 \cdot \cos(3 \cdot x) \quad y2(x) :=$ c

$x := -4, -3.99 .. 4$ – ранжированная переменная

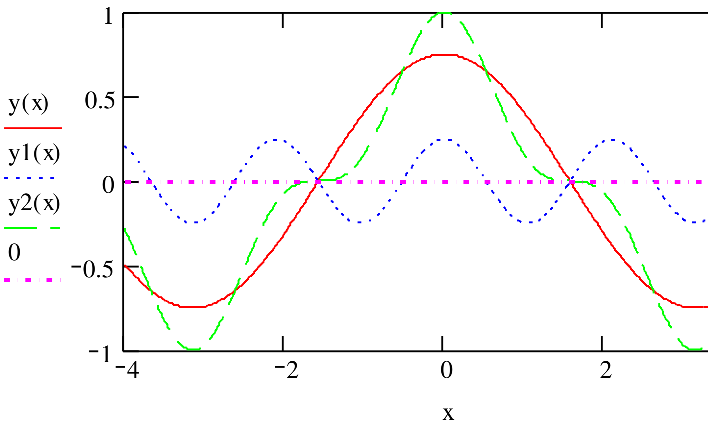


Рис. 6.4. Построение нескольких графиков

Используя функцию условия if , можно построить более сложные графики. Вид функции условия:

if (условие, выражение 1, выражение 2).

Если условие истинно, то выполняется выражение 1, в противном случае – выражение 2.

Пример 6.3. Построить график функции:

$$y = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } x < 1, \\ x - 1, & \text{если } 1 \le x < 2, \\ 3 - x, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

$x := -2, -1.99 .. 4 \qquad y(x) := \text{if}\big(x < 1, 1 - x^2, \text{if}(x \ge 2, 3 - x, x$

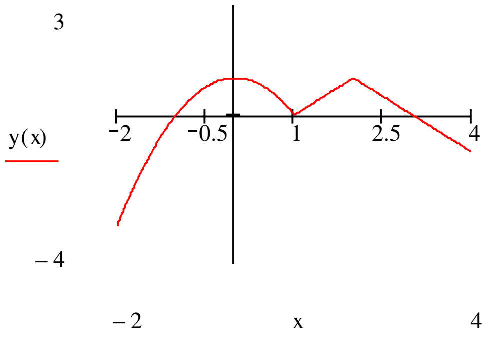


Рис. 6.5. График функции

6.2. **Построение графиков функций, заданных параметрически**

Для построения графиков функций, заданных параметрически: $x(t)=\varphi(t)$, $y(t)=\phi(t)$, $t_0<t<t_1$, сначала нужно выбрать шаблон двухмерного графика X-Y Plot, в середине горизонтальной и вертикальной осей ввести функции $x(t)$, $y(t)$. Переменная t может быть задана как ранжированная переменная.

Пример 6.4. Построить график функции, заданной параметрически

$x(t)=\cos^3 t$, $x(t)=\sin^3 t$ при $t\in[0,2\pi]$

$x(t) := \cos(t)^3$ $y(t) := \sin(t)^3$ $t := 0, 0.01 .. 2\cdot\pi$

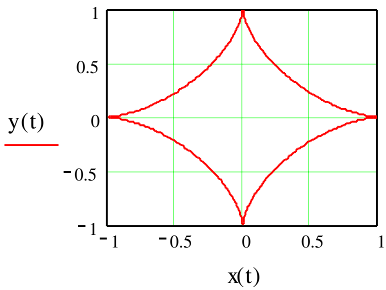


Рис. 6.6. График функции, заданной параметрически

Пример 6.5. Построить график уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при различных значениях параметров a, b.

Данное уравнение можно записать в параметрическом виде $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\ t \in [0,\ 2\pi]$. На рис. 6.7. нарисованы графики функции для $a = 2,\ b = 1$; $a = 1,\ b = 2$

$$x(a,t) := a\cdot\cos(t) \quad y(b,t) := b\cdot\sin(t) \qquad t := 0, 0.01..2$$

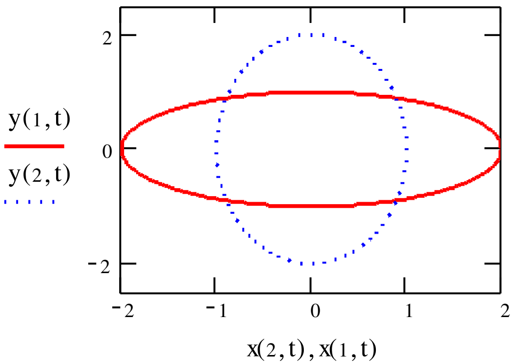


Рис. 6.7. График функции, заданной параметрически

6.3. **Построение графиков в полярной системе координат**

Для построения графиков $\rho(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ в полярной системе координат нужно выбрать шаблон Polar Plot в меню Insert/Graph. В нижнюю (горизонтальную) ячейку ввести полярный угол θ (для ввода греческих букв использовать панель Greek). В левую (вертикальную) ячейку ввести полярный радиус $\rho(\theta)$. Функцию $\rho(\theta)$ можно задать заранее как функцию пользователя либо ввести непосредственно в ячейку. Величину θ (полярный угол) можно задать как ранжированную переменную.

Пример 6.6. Построить график $\rho(\theta)=3\sin 4\theta$.

$\rho(\theta) := 3 \cdot s$

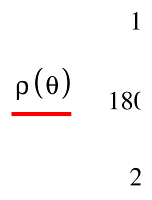


Рис. 6.8. График функции в полярных координатах

6.4. **Изменение размеров и перемещение графиков**

Построенные графики можно перемещать, можно изменять их размеры. Перед обработкой нужно выделить графическую область. Для этого нужно щелкнуть левой кнопкой мыши по графику – график окажется в прямоугольной рамке с черными прямоугольниками по контуру, которые называются маркерами. Для изменения размеров графика нужно подвести указатель мыши (красный крестик) к маркеру – указатель примет вид двусторонней стрелки. При нажатой левой кнопке, перемещая мышь по столу (при этом прямоугольная рамка становится пунктирной), можно растянуть либо сжать график, затем кнопку мыши отпустить (рис. 6.9). Размеры графика будут изменены. График X-Y Plot можно изменять в горизонтальном, вертикальном либо диагональном направлениях. График Polar Plot можно изменять только в диагональном направлении.

$$y(x) := \left|\cos(x)^2 - 0.25\right| + \left|0.25 - \sin(x)^2\right| \qquad x := 0, 0.01 .. 6$$

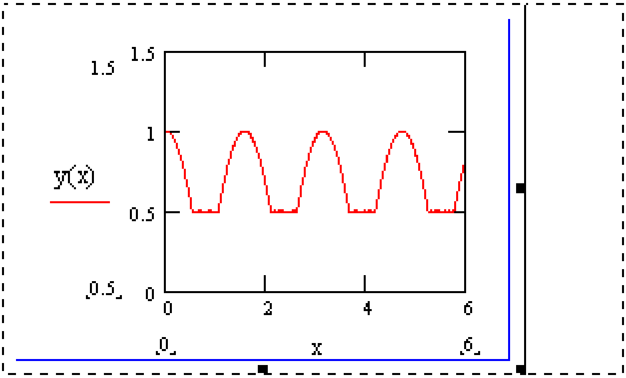


Рис. 6.9. Изменение размера графика

Для перемещения графика нужно поместить указатель мыши на линию рамки, выделяющую графическую область. При этом форма указателя будет изменена на ладошку. Нажав левую кнопку, можно переместить график в нужное место документа, затем отпустить кнопку мыши (рис. 6.10).

$$\rho(\theta) := 2 \cdot \theta \qquad \theta := 0, 0.133 .. 10$$

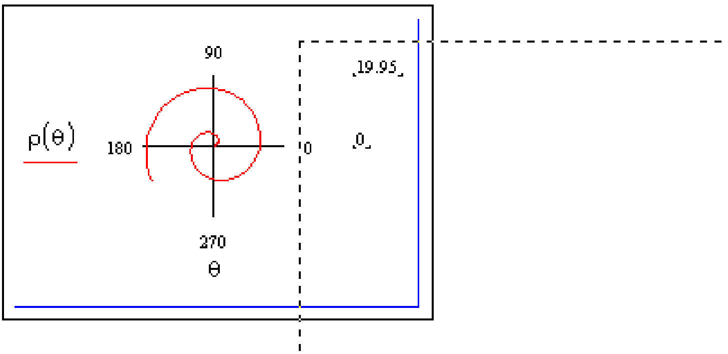


Рис. 6.10. Перемещение графика

6.5. **Форматирование двухмерных графиков**

Построенный график можно форматировать. Для этого нужно выделить график и выбрать команду X-Y Plot из Format/Graph либо выполнить двойной щелчок левой кнопкой мыши по графику. В результате появится диалоговое окно Formatting Currently Selected X-Y Plot для задания параметров форматирования выбранного графика (рис. 6.11).

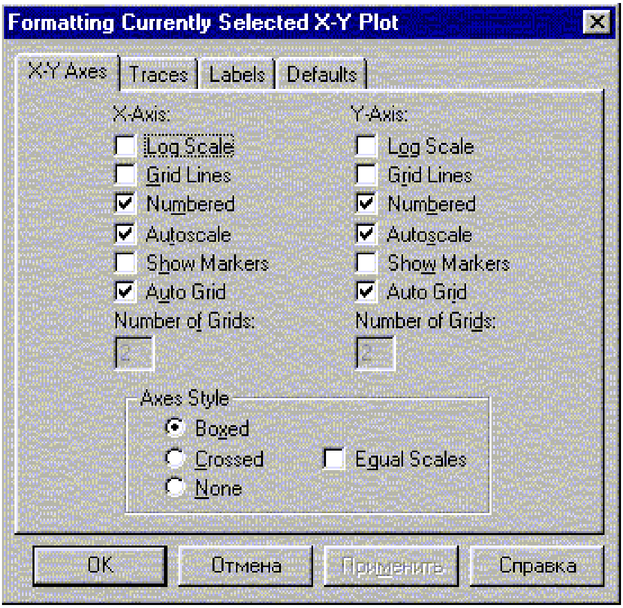


Рис. 6.11. Окно форматирования графика

Как видно из рис. 6.11, диалоговое окно формата имеет четыре вкладки:

1. **X-Y Axes** (X-Y Оси) – форматирование осей графика;
2. **Traces** (Линии графиков) – форматирование линий графика;
3. **Labels** (Надписи) – задание надписей на графике;
4. **Defaults** (По умолчанию) – установка параметров по умолчанию.

Форматирование осей графика

Вкладка X-Y Axes (рис. 6.11) содержит следующие основные опции для форматирования осей графика (Axis X и Axis Y):

· **Log Scale** (Логарифмический масштаб) – включить / выключить логарифмический масштаб;

· **Crid Lines** (Линии сетки) – включить / выключить вывод линий масштабной сетки;

· **Numbered** (Нумеровать) – включить / выключить вывод цифровых данных по осям;

· **Autoscale** (Автомасштаб) – включить / выключить автоматическое масштабирование графика;

· **Show Markers** (Показать метки) – включить / выключить установку двух дополнительных ячеек (по каждой оси) для создания красных линий маркировки, соответствующих двум значениям x и y;

· **Auto Grid** (Автосетка) – включить / выключить автоматическую установку масштабных линий;

· **Number of Grids** (Число интервалов) – включить / выключить установку заданного числа масштабных линий.

Стандартно по умолчанию устанавливаются опции: Numbered (Нумеровать), Autoscale (Автомасштаб), Auto Grid (Автосетка). Если опция Grid Lines отключена, то масштабная сетка графика не строится, хотя на осях размещаются черточки деления. Опция Numbered отображает цифровые данные (указаний на масштаб).

Можно также включить / выключить установку следующих опций координатных осей (Axes Style):

· **Boxed** (Рамка) – оси в виде прямоугольника;

· **Crossed** (Пересечение) – пересекающиеся оси в точке с координатами (0,0);

· **None** (Нет осей) – отсутствие осей;

· **Equal Scales** (Равные масштабы) – установка одинакового масштаба для обеих осей.

В нижней части окна размещены четыре клавиши:

OK – закрыть окно форматирования;

Отмена – отменить форматирование;

Применить – применить заданные параметры к графику;

Справка – вывод подсказки.

Форматирование линий графиков

Вкладка **Traces** (Графики) (см. рис. 6.12) служит для управления отображением линий, которыми строится график.

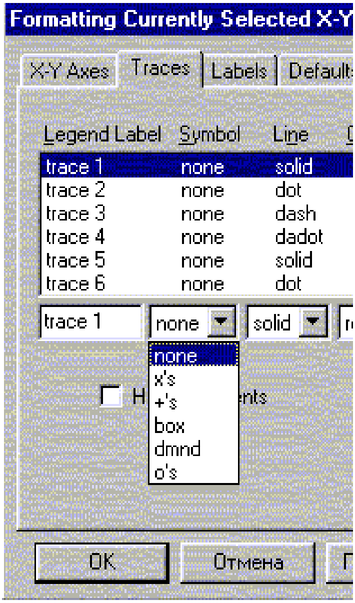


Рис. 6.12. Опции вкладки Traces

Она содержит следующие опции:

· **Legend Label** (Имя кривой) – указать тип линии у оси ординат соответствующей кривой;

· **Symbol** (Символ) – выбрать символ, который помещается на линию;

· **Line** (Линия) – установить тип линии (сплошная, пунктирная, точечная и др.);

· **Color** (Цвет**)** – установить цвет линии;

· **Type** (Тип) – установить тип графика;

· **Weight** (Толщина) – установить толщину линии.

Опция **Symbol** (Символ) позволяет задать следующие отметки базовых точек графика функции:

· none (ничего) – без отметки;
· x’s – наклонный крестик;
· +’x – прямой крестик;
· box (квадрат) – квадрат;
· dmnd (ромб) – ромбик;
· o’s – окружность.

Опция **Line** задает построение следующих типов линий:
· none (ничего) – линия не строится;
· solid (сплошная) – непрерывная линия;
· dash (пунктирная) – пунктирная линия;
· dadot (штрих-пунктирная) – штрих-пунктирная линия.

Опция **Color** (Цвет) позволяет выбрать цвет линии и базовых точек:
· red -красный;
· blu – синий;
· grn – зеленый;
· cya – голубой;
· brn – коричневый;
· bla – черный.

Опция **Type** (Тип) задает следующие типы графика:
· line (линия) — построение линиями;
· points (точки) — построение точками;
· err (интервалы) — построение вертикальными черточками с оценкой интервала погрешностей;
· bar (столбец) — построение в виде гистограммы;
· step (ступенька) — построение ступенчатой линией step;
· draw (протяжка) — построение протяжкой от точки до точки.

Следующие две опции связаны с возможностью удаления с графика вспомогательных надписей:

Hide Argument (Скрыть переменные) — спрятать обозначения математических выражений по осям графика;

Hide Legend (Скрыть имена) — спрятать обозначения имен кривых графика.

Задание надписей на графике.

Вкладка **Label** (Надписи) позволяет вводить в рисунок дополнительные надписи. Для установки надписей можно использовать окна:

· **Title** (Заголовок) – установить титульную надпись к рисунку;

· **X-Axis** (X-ось) – установить надпись по оси X;

· **Y-Axis** (Y-ось) – установить надпись по оси Y.

В **Title** опция **Show Title** (Показать заголовок) позволяет включать или выключать отображение титульной надписи. Здесь же содержатся опции **Above** (Сверху) и **Below** (Снизу) для размещения титульной надписи над рисунком либо под ним, которые включаются / выключаются соответствующими круглыми кнопками. Активизация этих опций задается установкой жирной точки в кружке.

Установление по умолчанию.

Вкладка **Defaults** (По умолчанию) служит для установки опций графиков:

Change to Defaults (Вернуть значения по умолчанию);

Use for Defaults (Использовать для значений по умолчанию).

Применение специального графического маркера.

Выделим построенный двухмерный график и выберем команду **Trace** из меню **Format/Graph**. В результате появляется окно **X-Y Trace**. Щелкнув левой кнопкой мыши по графику, появится графический маркер в виде двух перекрещивающихся пунктирных линий, и его координаты отображаются в окошках: X -Value, Y – Value. При включенной опции **Track Data Points** (Перемещение по точкам данных) маркер перемещается по кривой графика, и его можно установить на любую точку этой кривой. При этом его координаты отображаются в окошках. Кнопки **Copy X, Copy Y** позволяют скопировать отображенные координаты точки в окошках в буфер обмена и вставить затем в документ (рис. 6.13)

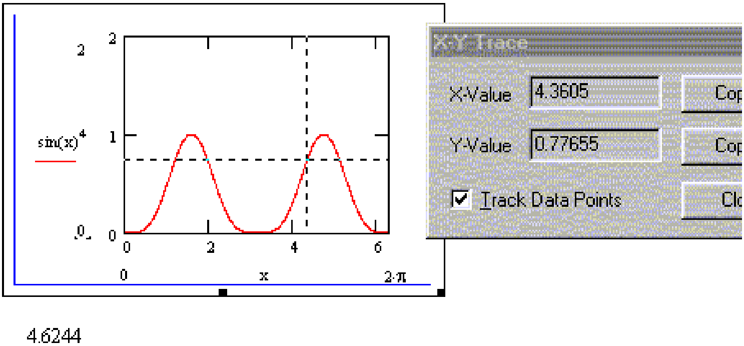


Рис. 6.13. Использование графического маркера

Просмотр части графиков с увеличением.

Имеется возможность просмотра с увеличением отдельных частей графика либо графиков. Это осуществляется с помощью команды **Zoom** из меню **Format/Graph**. В результате появляется окно X-Y Zoom (рис. 6.14). Перемещением мыши с нажатой левой кнопкой можно выделить определенную часть графика. При этом минимальная и максимальная координаты по осям X и Y отображаются в окне. После этого можно реализовать три варианта просмотра:

Zoom (Увеличение) – просмотр вырезанного участка;

Unzoom (Отмена увеличения) – отмена просмотра вырезанного участка;

Full View (Полный обзор) – полный просмотр.

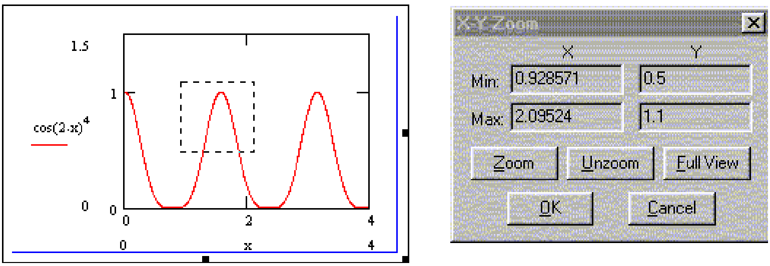


Рис. 6.14. Просмотр части графика

6.6. **Анимация (оживление) графиков**

В пакете имеется возможность создать анимационный график, то есть показать, как изменяется график функции $y=f(ax)$ в зависимости от изменения параметра а.

Встроенная целочисленная переменная **FRAME** позволяет управлять анимацией. По умолчанию она изменяется от 0 до 9 с шагом 1. Функция, график которой планируем наблюдать в развитии, должна быть функцией этой переменной.

Этапы создания анимационного графика:

· создать функцию, которая зависит от переменной FRAME, и построить график этой функции (рис. 6.15);

· выбрать команду Animate из режима View, в результате появится диалоговое окно Animate. Затем следует выделить графический объект пунктирной линией (рис. 6.15);

· установить верхнюю (From) и нижнюю (To) границы значений переменной **FRAME** и скорость вывода кадров в секунду (At Frames/Sec) в диалоговом окно Animate;

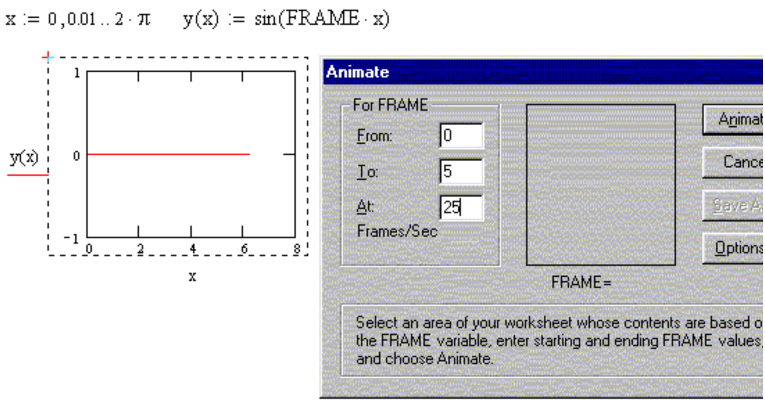


Рис. 6.15. Создание анимации

· щелкнуть по кнопке **Animate**. Появится окно, в котором будет строиться график для каждого значения переменной

FRAME, и проигрыватель анимационных кадров Playback (рис. 6.16).

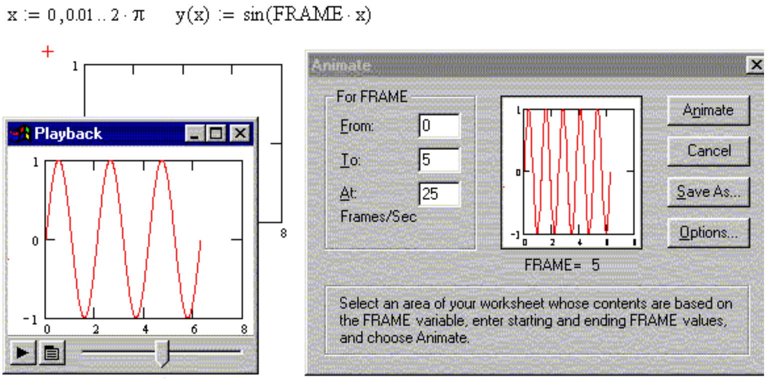


Рис. 6.16. Воспроизводство анимации

Для воспроизводства анимационного рисунка нужно нажать на кнопку в виде треугольника ►. Используя кнопку Save As ... в диалоговом окне Animate, можно сохранить анимацию рисунков в файле с расширением .avi для дальнейшего просмотра с помощью проигрывателя **Playback** в меню **View**.

С помощью кнопки Options можно выбрать программу воспроизведения видеофильмов. По умолчанию пакет работает с программой Microsoft Video 1, которая входит в состав OS Windows 95/98. Можно работать и с другими видеопрограммами, если они инсталлированы на компьютере.

7. Решение нелинейных уравнений и неравенств

7.1. Численное решение уравнений

Для численного решения нелинейного уравнения $f(x)=0$ можно использовать встроенную функцию root, которая имеет вид

root(f(x), x, [a,b]),

где $f(x)$ – левая часть уравнения, x – имя переменной, относительно которой решается уравнение, a, b – левый и правый концы отрезка, на котором находится корень уравнения (необязательные параметры).

Поиск корня уравнения осуществляется итерационным методом с заданной точностью (точность по умолчанию 10^{-3}; системная переменная TOL отвечает за точность). Перед использованием встроенной функции root необходимо задать начальное значение переменной.

Пример 7.1. Найти корень уравнения $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$ при различных начальных значениях переменной x и различной точности.

Задание функции пользователя

$f(x) := (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)-3$

$x := 0$ – начальное значение

$\mathrm{root}(f(x), x) = -0.69722352$ – корень уравнения

$x := -1$ – начальное значение

$\mathrm{root}(f(x), x) = -0.69725236$ – корень уравнения

$TOL := 0.000000001$ – задание новой точности

$x := 0 \qquad \mathrm{root}(f(x), x) = -0.69722436$

$x := -1 \qquad \mathrm{root}(f(x), x) = -0.69722436$

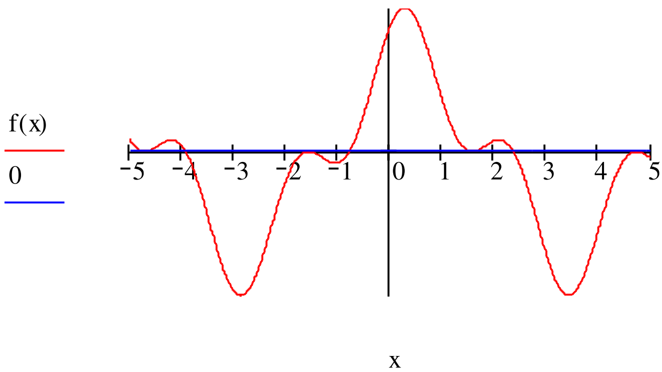
Если уравнение имеет несколько корней, следует нарисовать график функции $y=f(x)$ и выбрать подходящее начальное приближение либо отрезок, где находится корень уравнения.

Пример 7.2. Найти несколько корней уравнения $\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x=0$, предварительно нарисовав график функции $y=\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x$.

Функция пользователя – левая часть исходного уравнения

$$f(x) := \sin(x) + \sin(3\cdot x) + 4\cdot\cos(x)^3 .$$

График функции



$TOL := 10^{-6}$

$root(f(x), x, 2, 3) = 2.356194$ $root(f(x), x, -4, -3) = -3.926991$

$x := 1$ $root(f(x), x) = 1.570397$

$x := 0$ $root(f(x), x) = -0.785398$

Для решения уравнения $f(x)=P_n(x)$, где $P_n(x)=a_n x^n + {}$ $+ a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . + a_1 x + a_0$ – многочлен n-ой степени, имеется встроенная функция, позволяющая найти сразу все корни алгебраического уравнения:

polyroots(V),

где V – вектор размерности n+1, первый элемент которого равен a_0, а последний – a_n.

Пример 7.3. Найти все корни уравнения

$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$.

$$V := \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$ – вектор коэффициентов

$$\text{polyroots}\,(V) = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ – решение исходного уравнения.

7.2. **Символьное решение уравнений**

Для символьного решения уравнения сначала следует ввести исходное уравнение, используя знак равенства из панели Boolean либо комбинацию клавиш Ctrl + =. Установить курсор на переменную, относительно которой нужно решить уравнение, и выбрать команду Solve из меню Symbolic/Variable. На экране появляется одно или несколько решений данного уравнения с информационным сообщением has solution(s) либо сообщение, что нет решений. Если уравнение содержит целые коэффициенты, то решение выдается в формате целых чисел. Если же уравнение содержит вещественные числа, то решение выдается в формате как вещественных, так и комплексных чисел.

Пример 7.4. Решить с помощью команды Solve два уравнения

$x^4 + 4x - 1 = 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} = 7$ с различным форматом решения.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3\cdot x} = 7 \qquad \text{has solution(s)} \qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{\ln(7)}{\ln(2)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3\cdot x} = 7.0 \qquad \text{has solution(s)} \qquad .935784974019201$$

$$x^3 + 4\cdot x - 5 = 0 \qquad \text{has solution(s)} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i\cdot\surd \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i\cdot\surd \end{pmatrix}$$

$$x^3 + 4\cdot x - 5.0 = 0$$

has solution(s)

$$\begin{pmatrix} 1. \\ -.50000000000000000000 - 2.1794494717703367761\,\cdot \\ -.50000000000000000000 + 2.1794494717703367761\,\cdot \end{pmatrix}$$

Символьное решение уравнения можно получить и с помощью команды Solve из панели Symbolic. Для этого нужно щелкнуть левой кнопкой мыши по Solve, и на экране появится конструкция вида

$$\blacksquare \text{ solve}, \blacksquare \rightarrow$$

Слева от слова solve нужно ввести левую часть уравнения, т.е. функцию $f(x)$, справа – переменную, относительно которой решается уравнение, и щелкнуть левой кнопкой мыши в любом месте документа. В результате появится решение этого уравнения:

$$x^2 + 5x - 6 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Второй способ: выделить введенное уравнение, затем щелкнуть по команде Solve. Появится конструкция вида

$$5^x - 24 = \frac{25.0}{5^x} \text{ solve}, \blacksquare \rightarrow \quad ,$$

и в ней справа от слова solve ввести имя переменной, относительно которой решается уравнение, и щелкнуть левой кнопкой мыши в любом месте документа. Появится решение уравнения

$$5^x - 24 = \frac{25.0}{5^x} \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1.9519812658311713983 \cdot 1i \\ 2.0000000000000000000 \end{pmatrix}$$

Пример 7.5. Решение некоторых уравнений

1. Алгебраические уравнения

$$\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} b + a \\ \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \end{pmatrix}$$

$$|7 \cdot x - 10| - |10 \cdot x - 9| = 7 \cdot x - 7 \text{ solve}, x \rightarrow \frac{13}{12}$$

$$\frac{16x^2}{(x+4)^2} = 48 - x^2 \quad \text{has solution(s)} \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \\ 2 - 2 \cdot \sqrt{5} \\ -6 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{3} \\ -6 - 2 \cdot i \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2. Иррациональные уравнения

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - 9\cdot\sqrt{x} = \sqrt{6\cdot x-2}\ \text{solve}, x \ \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1\ \text{solve}, x \ \rightarrow 30$$

В этом примере находится только один корень. Второй корень уравнения x = – 61.

$$\sqrt{|5x-4|} - 5 = 2x - 3. \qquad \text{has solution(s)} \qquad \begin{pmatrix} 2.25000000000000 \\ 2. \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sqrt{x+2} = |x+1| + 4.0\ \text{solve}, x \rightarrow}$$

No solution was found.

3. Показательные и логарифмические уравнения

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} = \left(\sqrt{2}-1.\right)^{-x}\ \text{solve}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} 2.0000000000000000000 \\ 3.0000000000000000000 \end{pmatrix}$$

$$(0.04)^{x} - 5^{-x}\cdot 6 + 5 = 0 \qquad \text{has solution(s)} \qquad -1.00000000$$

Находится только один корень. Нет корня x = 0.

$$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^{x} + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^{x} = 6.0\ \text{solve}, x \ \rightarrow 3.000000000000000$$

Находится только один корень. Нет корня x = -3.

$$\log(8) - \log(x-5) = \log(2) - \log\left(\sqrt{x+7}\right) \qquad \text{has solution(s)}$$

$$\log(x)^{2} - \log\left(x^{3}\right) + 2 = 0 \qquad \text{has solution(s)} \qquad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$1 + 2 \cdot \log(5, x + 2) = \log(x + 2, 5)$$ has solution(s)

$$x^{\log(x) - 3} = 0.01 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 10.000000000000000000 \\ 100.00000000000000000 \end{pmatrix}$$

$$\log\left[(x + 2)^2, 2\right] + \log\left[(x + 10)^2, 2\right] = 4.0 \cdot \log(3, 2)$$

has solution(s)

$$\begin{pmatrix} -11. \\ -1. \\ -3.3542486889354094095 \\ -8.6457513110645905905 \end{pmatrix}$$

4. Тригонометрические уравнения

$$\sin(3x) + \cos(3x) = 0$$ has solution(s) $$\frac{-1}{12} \cdot \pi$$

Вычисляется только частное решение при n = 0.

$$(\cos(3x))^2 - \cos(6x) = 0$$ has solution(s) $$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \cdot \pi \end{pmatrix}$$

Вычисленные частные решения при n = 0, n = 1.

7.3. **Символьное решение неравенств**

Неравенства, как и уравнения, можно решать либо с помощью команды **Solve** (Решить) из меню **Symbolics/Variable**, отметив предварительно переменную, относительно которой решается неравенство, либо команды **Solve** (Решить) из панели **Symbolic**. Приведенные ниже примеры показывают, что пакет справляется с решением алгебраических неравенств, но не решает или решает некорректно иррациональные, показательные и логарифмические неравенства.

Пример 7.6. Решение алгебраических неравенств:

$$\frac{x-2}{3\cdot x-1} \le \frac{x+2}{2\cdot x+1} \quad \text{has solution(s)} \quad \left[\begin{array}{c} x \le -8 \\ \left(\frac{-1}{2} < x\right)\cdot(x \le \\ \frac{1}{3} < x \end{array}\right.$$

$$\frac{x^2-5\cdot x+6}{|x|+7} < 0 \text{ solve}, x \rightarrow (2 < x)\cdot(x < 3)$$

$$\left(x^2+x+1\right)^2-4\cdot\left(x^2+x+1\right)+3 < 0 \text{ solve}, x \rightarrow \left[\begin{array}{c} (-2 < x)\cdot(x < \\ (0 < x)\cdot(x < \end{array}\right.$$

Пример 7.7. Решение иррациональных неравенств:

$$x+\sqrt{2\cdot x+8} < 0 \quad \text{has solution(s)} \quad x < -2$$

$$\frac{\sqrt{2\cdot x-1}}{x-2} < 1 \quad \text{has solution(s)} \quad \begin{pmatrix} x < 2 \\ 5 < x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sqrt{1-x^2} > x-1 \text{ solve}, x \rightarrow}$$

No solution was found.

Приведенные примеры показывают, что пакет находит решение иррациональных уравнений, не учитывая область допустимых значений, либо вообще не находит решение.

Пример 7.8. Решение показательных и логарифмических неравенств:

$$\left(5^{-1}\right)^{\frac{2 \cdot x-3}{x-2}} > 5 \qquad \text{has solution(s)} \qquad \frac{5}{3} < x$$

Это неправильное решение. Решением данного показательного неравенства является решение неравенства

$$\frac{-(2 \cdot x - 3)}{x-2} > 1 \qquad \text{has solution(s)} \qquad \left(\frac{5}{3} < x\right) \cdot (x < $$.

$$\log\left(x^2 - 4 \cdot x + 3, 8\right) < 1 \text{ solve}, x \rightarrow (-1 < x) \cdot (x < 5).$$

Это решение неправильное, т.к. пакет решает только неравенство, полученное после преобразования логарифмов

$$x^2 - 4 \cdot x + 3 < 8 \text{ solve}, x \rightarrow (-1 < x) \cdot (x < 5),$$

не учитывая при этом область допустимых значений

$$x^2 - 4 \cdot x + 3 > 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x < 1 \\ 3 < x \end{pmatrix}$$

$$\log\left(\frac{3}{8-2x}, x\right) \ge -2 \qquad \text{has solution(s)} \qquad \begin{pmatrix} x < 1 \\ \frac{4}{3} \le x \end{pmatrix}$$

Правильное решение этого уравнения $x \in (0,1) \cup (1, 4)$

8. Решение систем уравнений

8.1. Численное и символьное решение систем линейных алгебраических уравнений

Неоднородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в матричной форме имеет вид AX = B. Известно, что неоднородная СЛАУ совместна (теорема Кронекера-Капелли), если ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы, т.е. rank(A) = rank(A|B). Совместная система имеет единственное решение, если rank(A) = rank(A|B) = n, n – размерность матрицы A. Решение СЛАУ в матричной форме имеет вид $X = A^{-1} * B$, где A^{-1} – обратная матрица к матрице A.

В MathCAD для решения СЛАУ имеются встроенная функция lsolve(A,B) и решающий блок Give – Find.

Пример 8.1. Решить систему матричным методом и с помощью встроенной функции:

$$\begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ \quad 2y + 7z = 17 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Вычисление ранга исходной матрицы и расширенной. Встроенная функция augment(A,B) объединяет две матрицы, имеющие одинаковое количество строк, в одну.

$$\mathrm{rank}(A) = 3 \qquad \mathrm{rank}(\mathrm{augment}(A, B)) = 3$$

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X1 := \mathrm{lsolve}(A, B)$$

Вывод решения, полученного матричным методом и с помощью встроенной функции lsolve(A,B):

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решающий блок **Give-Find** можно применять также и для решения систем нелинейных уравнений как в численном, так и в символьном виде. Для численного решения с помощью решающего блока нужно задать начальные значения для неизвестных величин и заключить уравнения в ключевые слова, начинающиеся со слова Given и заканчивающиеся словом Find(var1, var2, . . .) со знаком = . Для символьного решения системы не надо вводить начальные значения, а вместо знака = ввести символьный знак равно $\rightarrow$ из панели **Evaluation.**

Пример 8.2. Используя решающий блок **Give-Find**, найти решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x + 5y - z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = 2 \\ 3x - y - 3z = -7 \end{cases}$$

Исходные данные

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Вычисление ранга матрицы A и расширенной матрицы

$$\mathrm{rank}(A) = 3 \qquad \mathrm{rank}(\mathrm{augment}(A, B)) = 3$$

Задание начальных условий для неизвестных величин

$$x := 0 \qquad y := 0 \qquad z := 0$$

Начало решающего блока и система уравнений

Given

$$x + 5 \cdot y - z = 3$$

$$2x + 4 \cdot y - 3 \cdot z = 2$$

$$3 \cdot x - y - 3 \cdot z = -7$$

Нахождение решения системы

$$\mathrm{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Пример 8.3. Используя решающий блок **Give-Find**, найти символьное решение СЛАУ вида

$$\begin{cases} x - ay = b \\ ax - 4y = a + b + 1 \end{cases}$$

Given

$$x - a \cdot y = b$$

$$a \cdot x - 4 \cdot y = a + b + 1$$

$$\mathrm{find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\left(a^2 + a \cdot b + a - 4 \cdot b\right)}{\left(-4 + a^2\right)} \\ \dfrac{-(a \cdot b - a - b - 1)}{\left(-4 + a^2\right)} \end{bmatrix}$$

Если rank(A) = rank(A|B) $<$ n, то, используя встроенную функцию rref(A), нужно привести матрицу к ступенчатому виду и выбрать базисные и свободные (произвольные) переменные и найти решение системы в зависимости от выбранных свободных переменных.

Пример 8.4. Найти решение системы AX = B, где матрица A и вектор B имеют вид

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Вычисление рангов матриц:

$\mathrm{rank(A)=2} \qquad \mathrm{rank(augment(A, B)) = 2}$

Приводим расширенную матрицу с помощью встроенной функции rref(A) к ступенчатому виду:

$$\mathrm{rref\,(augment(A\,,B))} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В качестве базисных переменных выбираем X1, X2; решение системы будет зависеть от свободных переменных X3, X4:

$$X(x3, x4) := \begin{pmatrix} -1 + x3 + x4 \\ 3 - x3 - x4 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix}$$

Некоторые решения системы:

$$X(1\,,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X(1\,,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Однородная СЛАУ AX = 0 имеет нулевое решение, если ранг матрицы A равен количеству неизвестных величин, в противном случае система имеет бесконечное множество решений. Если rang(A) < n, то с помощью встроенной функции rref(A) нужно привести матрицу к ступенчатому виду и выбрать базисные и свободные (произвольные) переменные. Далее находим решение системы в зависимости от свободных переменных.

Пример 8.5. Найти решения следующих однородных СЛАУ

1. $\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 0, \\ x - 3y + 5z = 0, \\ 4x + y + 4z = 0 . \end{cases}$

Вычисляем ранг матрицы первой системы

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Первая система имеет только нулевое решение.

Вычисляем ранг матрицы второй системы:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 2$$

Вторая однородная система имеет бесконечное множество решений

Given

$$3 \cdot x + 4 \cdot y - z = 0$$

$$x - 3 \cdot y + 5 \cdot z = 0$$

$$4 \cdot x + y + 4 \cdot z = 0$$

$$\text{Find}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{-17}{13} \cdot z \\ \dfrac{16}{13} \cdot z \\ z \end{pmatrix}$$

В качестве свободной переменной выбрана переменная z.

8.2. **Вычисление собственных значений и векторов**

Для вычисления собственных значений матрицы A можно использовать встроенную функция eigenvals(A). Для нахождения собственного вектора, соответствующего собственному значению λ матрицы A, следует выбрать встроенную функцию eigenvec(A, λ). Встроенная функция eigenvecs(A) находит все собственные векторы матрицы A.

Пример 8.6. Найти собственные значения и векторы матрицы вида

$$A := \begin{pmatrix} 2.2 & 2 & 0.5 & 2 \\ 1 & 1.3 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 1.6 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения исходной матрицы

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 5.876526 \\ 0.540693 \\ -1.529036 \\ 1.111817 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы матрицы A

$$Sv := \text{eigenvecs}(A) \qquad Sv = \begin{pmatrix} 0.59188 & -0.24537 & 0.3747 & -0.41 \\ 0.42105 & -0.56721 & -0.48282 & 0.636 \\ 0.38175 & -0.05413 & 0.68974 & 0.402 \\ 0.57155 & 0.78431 & -0.38825 & -0.51 \end{pmatrix}$$

Первый столбец матрицы Sv соответствует первому собственному значению $\lambda = 5.876526$, второй столбец – второму собственному значению $\lambda = 0.5406393$ и т.д.

Для выполнения проверки следует умножить исходную матрицу A на собственный вектор, который соответствует первому собственному значению, и вычесть произведение собственного значения на соответствующий собственный вектор, т.е $A\lambda - \lambda X = 0$:

$$A \cdot Sv^{\langle 0 \rangle} - \lambda_0 \cdot Sv^{\langle 0 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.3. **Решение систем нелинейных уравнений**

Системы нелинейных уравнений в основном решаются численными методами.

Пример 8.7. Используя решающий блок, решить систему

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1{,}2x = 0{,}4, \\ 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Начальные значения

$x := 0 \qquad y := 0$.

Находим решение системы с помощью блока Given – Find

Given

$$\sin(2x-y)-1.2x = 0.4$$

$$0.8x^2+1.5y^2 = 1$$

$$\mathrm{Find}(x,y) = \begin{pmatrix} -0.43906 \\ -0.7509 \end{pmatrix}$$

Если взять другие начальные значения, то получим еще одно решение исходной системы

$x := 0.5 \qquad y := 0.5$

$$\sin(2x-y)-1.2x = 0.4$$

$$0.8x^2+1.5y^2 = 1$$

$$\mathrm{Find}(x,y) = \begin{pmatrix} -0.43906 \\ -0.7509 \end{pmatrix}$$

Пример 8.8. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 2$ и параболы $y = x^2$.

Символьное решение системы уравнений

$$\begin{pmatrix} y-x^2 = 0 \\ x^2+y^2 = 2. \end{pmatrix} \mathrm{solve}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1. \\ -1. \\ -1.4142135623730950488i \\ 1.4142135623730950488i \end{pmatrix}$$

9. **Вычисление пределов, сумм, произведений**

В MathCAD имеются специальные операторы для вычисления пределов, конечных и бесконечных сумм, произведений. Пиктограммы этих операторов расположены в панели **Calculus**.

9.1. **Символьное вычисление пределов**

Символьное вычисление пределов можно выполнять двумя способами.

Первый способ. Ввести оператор предела, используя панель **Calculus**. Затем задать предел для переменной и выражение, предел которого нужно вычислить (рис. 9.1).

$$\lim_{x\to\blacksquare} \blacksquare \qquad \lim_{x\to 1^+} \blacksquare \qquad \lim_{x\to\infty^-} (x+\blacksquare$$

Рис. 9.1. Оператор предела

После этого нужно выделить все выражение и выполнить команду **Symplify** из меню **Symbolics** либо команду **Symbolically** из меню **Symbolics/Evaluate**. В результате на экране появится искомое значение предела или сообщение об ошибке.

Пример 9.1. Вычислить предел выражения

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\cdot\sqrt[3]{x^4}},$$

используя команду **Symplify** и **Symbolically**.

Результат вычисления по команде **Symplify**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\cdot\sqrt[3]{x^4}} \quad \text{simplifies to} \quad \frac{2}{27}$$

Результат вычисления по команде **Symbolically**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\cdot\sqrt[3]{x^4}} \quad \text{yields} \quad \frac{2}{81}\cdot\sqrt[3]{27}$$

Из приведенных примеров видно, что результатом вычисления по команде **Symplify** является рациональное число, а по команде **Symbolically** – нет.

Пример 9.2. Вычисление левосторонних и правосторонних пределов с помощью команды **Symplify**:

$$\lim_{x \to 0^+} x^x \quad \text{simplifies to} \quad 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{simplifies to} \quad 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{1 - x}\right) \quad \text{simplifies to} \quad \frac{1}{2} \cdot \pi$$

Пример 9.3. Вычисление пределов на бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{acos}\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) \quad \text{simplifies to} \quad \frac{1}{3} \cdot \pi$$

$$\lim_{x \to \infty^-} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}\right) \quad \text{simplifies to}$$

Второй способ. Для вычисления пределов можно использовать знак символьного равенства $\rightarrow$.

Пример 9.4. Вычисление пределов с помощью символьного равенства

$$\lim_{x \to \infty} (x - \ln(\cosh(x))) \rightarrow \ln(2)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} \rightarrow \cos(a)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \to a^a \cdot \ln(a) - a^a$$

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to a} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} \to \exp(1)$$

Пример 9.5. Найти наклонную асимптоту функции $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ и нарисовать ее график.

Создание пользовательской функции

$$f(x) := \frac{x^2 - 3\cdot x - 2}{x + 1}$$

Вычисление коэффициентов наклонной прямой

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) \to -4$$

nl(x):= x - 4 – это наклонная асимптот

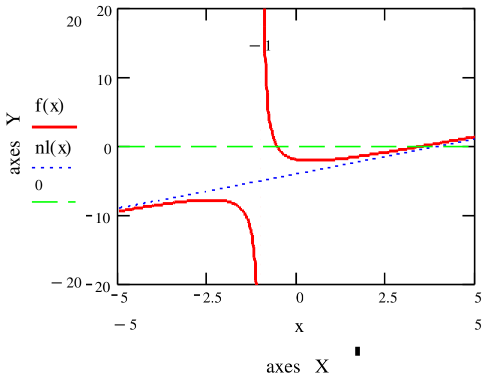


Рис. 9.2. График функции $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$

9.2. **Вычисление сумм и произведений**

Оператор суммы (произведения) можно ввести, используя панель **Calculus**. Затем задать пределы изменения индекса, в соответствующих ячейках над и под символом суммы (произведения), а после знака суммы (произведения) ввести выражение, задающее отдельное слагаемое либо множитель (рис. 9.3.).

$$\sum_{n=1}^{10} n \qquad \sum_{n} \blacksquare \qquad \prod_{k} k^{\blacksquare} \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Рис. 9.3. Операторы суммы и произведения

Приведенные выше операторы могут выполнять как численные, так и символьные вычисления. Для численного вычисления суммы (произведения) следует ввести знак =, и после введенного выражения появится численный результат.

Пример 9.6. Вычисление конечных сумм и произведений

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^k}{k\cdot(k+1)\cdot(2\cdot k+1)} = -0.141566$$

$$\sum_{n=1}^{20} \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{(4\cdot k-1)^{2\cdot n}} = 0.171514$$

$$x := 4 \qquad k := 0..50$$

$$\sum_{k} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\cdot k)!}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{4\cdot k} = 0.205507$$

$$\prod_{k=3}^{100} \left(1-\frac{\pi^2}{2k^2}\right)\cdot \sec\left(\frac{\pi}{k}\right) = 0.868859$$

Пример 9.7. Вычислить сумму $S = \sum_{i=1}^{10} \sqrt{a_i + b_i}$, где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_i = \begin{cases} i/2, \text{ если } i - \text{четное}, \\ i\ , \text{ если } i - \text{нечетное}, \end{cases} \qquad b_i = \begin{cases} 2i, \text{ если } i - \text{четное}, \\ 3i\ , \text{ если } i - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Вычисление коэффициентов

$i := 1 .. 10$

$$a_i := \text{if}\left(\text{mod}(i,2) = 0, \frac{i}{2}, i\right) \qquad b_i := \text{if}(\text{mod}(i,2) = 0, 2 \cdot i$$

Вычисление суммы

$$S := \sum_i \sqrt{a_i + b_i} \qquad S = 39.9712051$$

Для символьного вычисления суммы (произведения) верхний индекс нужно задать неопределенной переменной либо ∞. Затем выделить все выражение и выбрать команду **Symplify** или **Factor** из меню **Symbolics** либо команду **Symbolically** из меню **Symbolics/Evaluate**. В результате появится искомое значение суммы (произведения) или сообщение об ошибке. Для символьного вычисления можно также использовать знак символьного равенства $\rightarrow$.

Пример 9.8. Вычислить сумму $\sum_{i=1}^{n} i^2$ и произведение $\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, используя команды **Symplify, Factor, Symbolically.**

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \quad \text{simplifies to} \quad \frac{1}{3}\cdot n^3 + \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{6}\cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \quad \text{by factoring, yields} \quad \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \quad \text{yields} \quad \frac{1}{3}\cdot(n+1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 + \frac{1}{6}\cdot n + \frac{1}{6}$$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{simplifies to} \quad \frac{1}{(2\cdot n)}\cdot(n+1)$$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{by factoring, yields} \quad \frac{1}{2}\cdot\Gamma(n)\cdot\frac{\Gamma(n+}{\Gamma(n+1}$$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{yields} \quad \frac{1}{2}\cdot\Gamma(n)\cdot\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1)^2}$$

Пример 9.9. Вычисление некоторых сумм и произведений

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \quad \text{simplifies to} \quad 2$$

$$\sum_{(k=1..\infty)} \frac{1}{(2\cdot k-1)^2} \rightarrow \frac{1}{8}\cdot\pi^2$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4l-1)^{2k}} \quad \text{simplifies to} \quad \frac{1}{4}\cdot\ln(2)$$

$$\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-1}{k^3+1} \quad \text{by factoring, yields} \quad \frac{2}{3}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right] \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k} \rightarrow 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

10. **Вычисление производных, интегралов. Задачи на экстремум**

10.1. **Вычисление производных**

Символьное вычисление производных можно выполнять тремя способами.

Первый способ. Ввести выражение и отметить курсором переменную, по которой производится дифференцирование. Затем выполнить команду **Differentiate** из меню **Symbolics/Variable**. Предварительно нужно установить в **Symbolics/Evaluation Style** опцию **Horizontally** и отметить окошко **Show Comments** для вывода результата и комментарий в одной строке.

Пример 10.1. Вычислить производную с помощью команды Differentiate:

$\sin(ax+b)^2$ by differentiation, yields $2\cdot\sin(ax+b)\cdot\cos(ax$

$\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ by differentiation, yields $\dfrac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}+\dfrac{x^2}{\left(a^2-x^2\right.}$

$\ln(\sin(2x))$ by differentiation, yields $2\cdot\dfrac{\cos(2\cdot x)}{\sin(2\cdot x)}$

Второй способ. Ввести оператор дифференцирования, используя панель **Calculus** (рис.10.1). В нижней ячейке указать переменную, по которой производится дифференцирование, затем ввести дифференцируемое выражение. Выделить его и выбрать команду **Symbolically** из меню **Symbolics/Evaluate.**

$$\frac{d}{dx}\blacksquare \qquad\qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

Рис. 10.1. Операторы дифференцирования

Пример 10.2. Вычислить производную с помощью команды Symbolically

$$\frac{d}{dx}\sin(\ln(x)) \quad \text{yields} \quad \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(a x^3 + b\cdot x + c\right) \quad \text{yields} \quad 6\cdot a\cdot x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot y + \sin(x\cdot y)\right) \quad \text{yields} \quad 2\cdot x\cdot y + \cos(x\cdot y)\cdot y$$

Третий способ. Ввести оператор дифференцирования, затем символьный знак равенства $\rightarrow$ (вводится с использованием соответствующей пиктограммы на панели **Symbolic** либо комбинацией клавиш Ctrl + $\rightarrow$) и щелкнуть левой кнопкой мыши в любом свободном месте документа. На экране появится результат вычисления. Преимущество этого способа вычисления производных заключается в автоматическом обновлении результата при изменении исходного выражения.

Пример 10.3. Вычислить производную с помощью символьного знака равенства.

$$f(x,y) := x^2\cdot y + y^2\cdot x$$

$$\frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow 2\cdot x\cdot y + y^2 \qquad \frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow x^2 + 2\cdot x\cdot y$$

$$\frac{d}{dx}\frac{(1-x)^k}{(1+x)^n} \rightarrow -(1-x)^k\cdot\frac{k}{\left[(1-x)\cdot(1+x)^n\right]} - \frac{(1-x)^k}{(1+x)^n}\cdot\frac{}{(1}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(n\cdot x)\cdot\sin(x)^n \rightarrow -\sin(n\cdot x)\cdot n\cdot\sin(x)^n + \cos(n\cdot x)\cdot\sin(x)^n\cdot n\cdot\frac{c}{s}$$

Пример 10.4. Показать, что функция $u(x,y)=e^x(x\cos y - y\sin y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$.

$$u(x,y) := e^x\cdot(x\cdot\cos(y) - y\cdot\sin(y))$$

$$f(x,y) := \frac{d^2}{dx^2}u(x,y) \to \exp(x)\cdot(x\cdot\cos(y) - y\cdot\sin(y)) + 2\cdot\exp(x)$$

$$g(x,y) := \frac{d^2}{dy^2}u(x,y) \to \exp(x)\cdot(-x\cdot\cos(y) - 2\cdot\cos(y) + y\cdot s$$

$$f(x,y) + g(x,y)\ \text{simplify} \to 0.$$

Для вычисления значения производной в точке (численное дифференцирование) поступают следующим образом: нужно присвоить переменной численное значение, ввести оператор дифференцирования с соответствующей переменной и дифференцируемым выражением и знак =. В результате появится численный результат.

Пример 10.5. Вычислить значение производной в точке

$$x := 2 \qquad \frac{d}{dx}\cos\left(x^2 + x + 1\right) = -3.284933$$

10.2. **Вычисление интегралов**

Выполнить символьное интегрирование, как и дифференцирование, можно тремя способами.

Первый способ. Ввести интегрируемое выражение и указать переменную, относительно которой производится интегрирование, затем выполнить команду **Integrate** из **Symbolics/ Variable.**

Пример 10.6. Вычислить интегралы с помощью команды **Integrate**

$$\frac{1}{x^2 + 4\cdot x + 20} \quad \text{by integration, yields} \quad \frac{1}{4}\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{1}{4}\cdot x + \frac{1}{2}\right.$$

$$\cos(3\cdot x)^2 \quad \text{by integration, yields} \quad \frac{1}{6}\cdot\cos(3\cdot x)\cdot\sin(3\cdot x) +$$

Второй способ. Ввести неопределенный либо определенный оператор интегрирования, используя соответствующие пиктограммы панели **Calculus** (рис. 10.2).

$$\int \frac{1}{x}\,dx \qquad\qquad \int_0^\infty \cos(x\ \ d$$

Рис. 10.2. Неопределенный и определенный операторы интегрирования

После ввода оператора интегрирования следует ввести подынтегральную функцию и переменную интегрирования, затем выделить все выражение и выбрать команду **Symbolically** из меню **Symbolics/Evaluate.**

Пример 10.7. Вычислить неопределенные интегралы с помощью команды **Symbolically**

$$\int \sin(\ln(x))\,dx \quad \text{yields} \quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln($$

$$\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx \quad \text{yields} \quad \frac{-1}{\left(a^2\cdot x\right)}\cdot\left(x^2 + a^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right.}$$

$$\int \frac{1}{3 + 5\cdot\cos(x)}\,dx \quad \text{yields} \quad \frac{-1}{4}\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) - 2\right) + \frac{1}{4}\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\cdot\right.\right.$$

Используя определенный оператор интегрирования, сходным образом можно вычислять несобственные интегралы.

Пример 10.8. Вычислить несобственные интегралы с помощью команды **Symbolically**

$$\int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx \quad \text{yields} \quad \frac{1}{2}$$

$$\int_1^{e} \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln(x)}}\,dx \quad \text{yields} \quad 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4 \cdot x + 13}\,dx \quad \text{yields} \quad \frac{1}{12} \cdot \pi$$

$$\int_0^{\infty} \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2}\right) dx \quad \text{yields} \quad -b \cdot \operatorname{csgn}(b) \cdot \pi + a \cdot \operatorname{csgn}(a) \cdot \pi$$

Третий способ. Если при выполнении символьных вычислений указать ключевое слово **float**, то вместо символьных констант π и е в итоговое выражение будут автоматически подставлены их числовые значения, при этом следует задать количество знаков после запятой. Ключевое слово **assume** позволяет наложить ограничения на значение параметра.

Пример 10.9. Вычислить интегралы с помощью символьного знака равенства:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx \rightarrow \ln(\csc(x) - \cot(x))$$

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx \text{ assume}, n > 0 \rightarrow \frac{1}{n}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \text{ float}, 15 \rightarrow 1.57079632679490$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx \text{ assume}, a < 1 \rightarrow \frac{-1}{(-1+a)}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a}\,dx \text{ assume}, a > 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{a^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

Для численного вычисления определенного интеграла нужно ввести определенный оператор интегрирования и указать числа в качестве пределов интегрирования. Затем ввести подынтегральную функцию и знак =. В результате на экране появится численное значение интеграла.

Пример 10.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin x$, $y = 1 - x^2$.

Находим точки пересечения данных исходных кривых, предварительно нарисовав графики функций:

$$g(x) := 1 - x^2 \qquad f(x) := \sin(x) \qquad x := -2, -1.99 .. 2$$

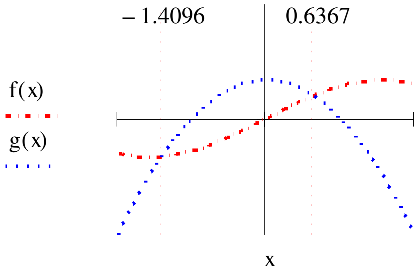


Рис. 10.3. Графики функций

$x := -1 \qquad a := \mathrm{root}(f(x) - g(x), x) \qquad a = -1.409624$

$x := 1 \qquad b := \mathrm{root}(f(x) - g(x), x) \qquad b = 0.636733$

Площадь криволинейной трапеции равна

$$S := \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \qquad S = 1.670214$$

Пример 10.11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом (рис. 6.7)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметрическое уравнение эллипса имеет вид:

$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t.$

Площадь фигуры, ограниченной эллипсом, равна

$x(a,t) := a \cdot \sin(t) \qquad y(b,t) := b \cdot \cos(t)$

$$dx(a,t) := \frac{d}{dt}x(a,t) \to a \cdot \cos(t)$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} y(b,t)\cdot dx(a,t)\,dt \to \pi\cdot b\cdot a$$

Площадь фигуры, вычисленной через двойной интеграл

$$a\cdot b\cdot\int_0^{2\cdot\pi}\int_0^1 \rho\,d\rho\,d\phi \to \pi\cdot b\cdot a.$$

Пример 10.12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho(\phi) = 2\sqrt{\cos 2\phi}$.

$$\rho(\phi) := 2\cdot\sqrt{\cos(2\cdot\phi)} \qquad \phi := 0, 0.1 .. 2\cdot\pi$$

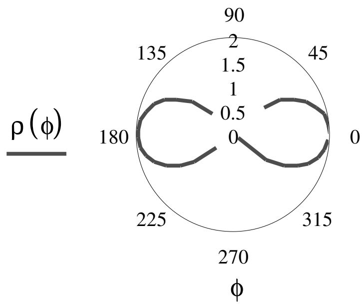


Рис. 10.4. График лемнискаты Бернулли

Площадь равна:

$$4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\rho(\phi))^2\,d\phi \to 4$$

Пример 10.13. Вычислить двойные интегралы.

$$\int_1^2\int_3^4 \frac{1}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 0.069772$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot a^3$$

$$4\cdot\int_{0}^{\frac{a}{2}}\int_{0}^{\frac{b}{2}} \left[h-\left(\frac{x^2+y^2}{2\cdot p}\right)\right]dy\,dx \rightarrow \frac{-1}{24}\cdot b\cdot a\cdot\frac{\left(-24\cdot h\cdot p+a^2+b\right.}{p}$$

$$\frac{-1}{24}\cdot b\cdot a\cdot\frac{\left(-24\cdot h\cdot p+a^2+b^2\right)}{p} \quad \text{expands to} \quad b\cdot a\cdot h-\frac{1}{24}\cdot b\cdot\frac{a^3}{p}-\frac{1}{24}$$

10.3. **Задачи на экстремум**

Для нахождения значений x, y, z, при которых функция f(x, y, z) достигает максимум либо минимум, можно использовать решающий блок **Given-Find,** только **Find(x,y,z**) заменить на **Maximize(f,x,y,z)** либо **Minimize(f,x,y,z)**. Внутри блока могут быть заданы ограничения в виде равенств или неравенств. Перед вызовом решающего блока нужно задать начальные значения переменных.

Пример 10.14. Найти максимум функции $f(x) = -x^3 + x^2 + 2 + \ln x$.

Пользовательская функция

$$f(x) := -x^3 + x^2 + 2 + 2\cdot\ln(x)$$

График функции

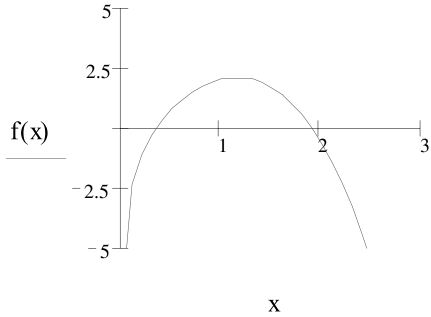


Рис. 10.5. График функции

$x := 1.5$

Given

$xmax := \text{Maximize}(f, x)$

$xmax = 1.161 \qquad f(xmax) = 2.082$

Пример 10.15. Найти минимум функции $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$ при $x > 0$.

Пользовательская функция

$$f(x) := \frac{1 + x^2}{1 + x}$$

$x := 1$

Given

$x \geq 0$

$xmin := \text{Minimize}(f, x)$

$xmin = 0.414 \qquad f(xmin) = 0.828427$

Пример 10.16. Найти максимум функции $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ при $x \in [-5, -1]$.

$$g(x) := \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$$

$x := -2$

Given

$x \geq -5 \qquad x \leq -1$

$xmax := \text{Maximize}(g, x)$

$xmax = -3 \qquad g(xmax) = -2$

Пример 10.17. Найти максимум и минимум функции $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ при ограничениях вида $x + 2y \leq 4$, $x - 2y \leq 4$, $x \geq 0$.

Пользовательская функция

$f(x, y) := 4 \cdot (x - y) - x^2 - y^2$

Начальные условия

$x := 1 \qquad y := 1$

Нахождение максимума

Given

$x + 2 \cdot y \leq 4 \qquad x - 2 \cdot y \leq 4 \qquad x \geq 0$

$a := \text{Maximize}(f, x, y)$

$a_0 = 1.6 \qquad a_1 = -1.2 \qquad f(a_0, a_1) = 7.2$

Нахождение минимума

Given

$x + 2 \cdot y \leq 4 \qquad x - 2 \cdot y \leq 4 \qquad x \geq 0$

$a := \mathrm{Minimize}(f, x, y)$

$a_0 = 0 \quad a_1 = 2 \quad f(a_0, a_1) = -12$.

Пример 10.18. Найти максимум функции $f(x, y) = 3x + 2y$ при ограничениях вида $x + 2y \geq 5$, $-x + 7y \leq 70$, $2.5x + y \leq 30$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ (задача линейного программирования).

Пользовательская функция

$f(x, y) := 3 \cdot x + 2 \cdot y$.

Область ограничения на плоскости

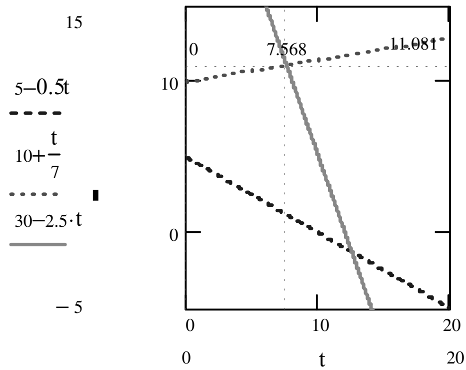


Рис. 10.6. Область ограничения

Нахождение максимума

$x := 1 \quad y := 1$

Given

$x + 2 \cdot y \geq 5 \quad -x + 7 \cdot y \leq 70$

$2.5 \cdot x + y \leq 30 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$

$xym := \mathrm{Maximize}(f, x, y)$

$xym_0 = 7.568 \quad xym_1 = 11.081 \quad f(xym_0, xym_1) = 4$

11. **Решение дифференциальных уравнений**

MathCAD содержит встроенные функции для численного решения задачи Коши и граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений. Эти функции расположены в библиотеке встроенных функций Differential Equation Solving.

11.1. **Решение задачи Коши и граничной задачи с помощью odesolve**

Для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения, линейного относительно старшей производной:

$$a(x)y^{(n)}(x) + F(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = G(x),$$

$$y(a) = f_0, \quad y'(a) = f_1, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(a) = f_{n-1}$$

и простой граничной задачи

$$y^{(p)}(a) = f_p, \qquad y^{(m)}(m) = f_m, \quad 0 \le p, m \le n-1,$$

в MathCAD имеется встроенная функция odesolve, которая решает поставленную задачу методом Рунге - Кутта с фиксированным шагом. Для численного решения поставленной задачи методом Рунге - Кутта с автоматическим выбором шага нужно щелкнуть правой кнопкой мыши по имени функции и в всплывающем меню выбрать команду Adaptive (рис. 11.1).

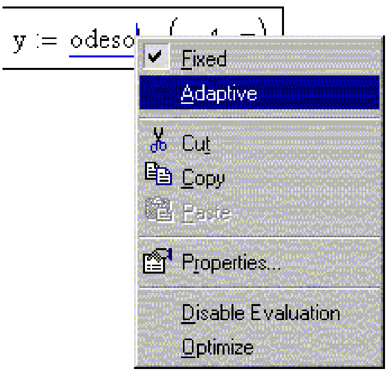


Рис. 11.1. Выбор команды Adaptive

Обращение к функции odesolve имеет вид:

Y := odesolve(x, b [, step]),

где Y – имя функции, содержащей значения найденного решения, b – конечная точка отрезка, на котором ищется решение задачи, step – необязательный параметр, задающий шаг.

Перед обращением к функции **odesolve** нужно записать ключевое слово **Given**, ввести дифференциальное уравнение, начальные либо граничные условия. Для ввода производных можно использовать как оператор дифференцирования, так и знак производной (комбинация клавиш Ctrl + F7). Знак равенства вводится с помощью пиктограммы Boolean либо комбинацией клавиш Ctrl + = . При вводе функции обязательно следует указывать аргумент исходной функции. Для получения численного решения задачи в любой точке отрезка [a, b] нужно задать имя функции Y, указав в скобках численное значение аргумента, и ввести с клавиатуры знак =.

Пример 11.1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y'(x) = -2y(x) - 3\sin x$, $y(0) = 2$ на отрезке [0, 10] и построить график решения.

Given

$$y'(x) = -2\cdot y(x) - 3\cdot\sin(x) \qquad y(0) = 3$$

$$y := \mathrm{odesolve}(x, 10)$$

Значение решения задачи Коши в некоторых точках отрезка [0;10]:

$$x := 1, 2.5 .. 10$$

x =	y(x) =
1	-0.36078
2.5	-1.18268
4	0.51678
5.5	1.27189
7	-0.33604
8.5	-1.31939
10	0.14938

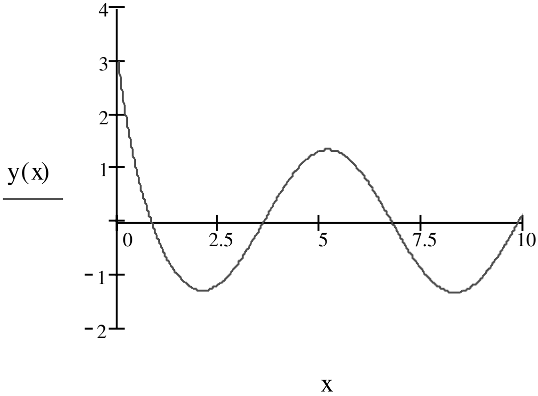


Рис. 11.2. График решения

Пример 11.2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка $y''(x) - \sin x y'(x) + y(x) = \dfrac{x}{2\pi}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ на отрезке [0, 10] и построить график решения.

Given

$$y''(x) - \sin(x)\cdot y'(x) + y(x) = \frac{x}{2\cdot\pi} \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0)$$

$$y := \mathrm{odesolve}(x, 10)$$

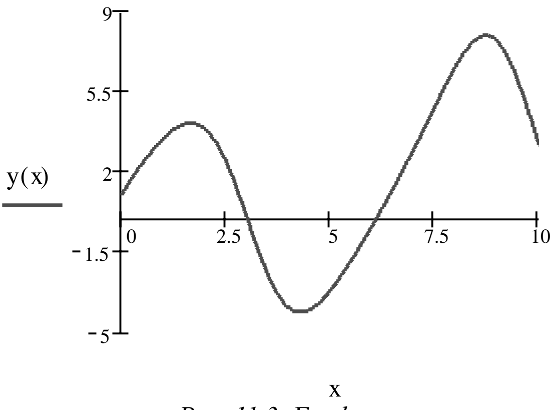


Рис. 11.3. График решения

Пример 11.3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения третьего порядка $y'''(x)-\frac{(y''(x))^2}{y'(x)}=6y(x)(y'(x))^2$, $y(2)=0$, $y'(2)=1$, $y''(2)=0$ на отрезке [2, 3.3] и построить график решения.

Given

$$\frac{d^3}{dx^3}y(x)-\frac{\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)^2}{\frac{d}{dx}y(x)} = 6\cdot y(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2$$

$$y(2) = 0 \qquad y'(2) = 1 \qquad y''(2) = 0$$

$$y := \text{odesolve}(x, 3.3, 0.001)$$

График функции, являющейся решением поставленной задачи Коши

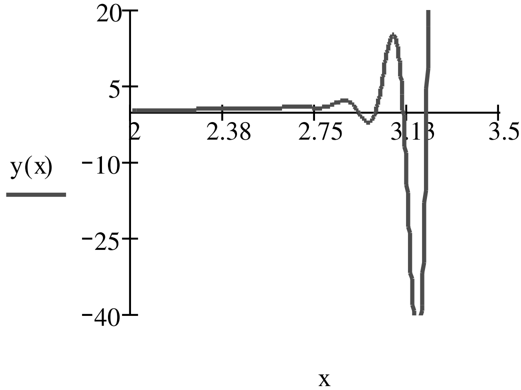


Рис. 11.4. График решения

Значения решения поставленной задачи Коши в некоторых точках отрезка [2, 3.3]:

$$a := 2.8, 2.85 .. 3.3$$

a =	y(a) =
2.8	0.932
2.85	1.907
2.9	1.143
2.95	-1.997
3	1.459
3.05	13.936
3.1	2.076
3.15	-42.867
3.2	4.621
3.25	256.142
3.3	633.416

Пример 11.4. Решить граничную задачу для дифференциального уравнения второго порядка $y''(t)+9y(t)=4$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$ и построить график решения.

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 9y(t) = 4$$

$$y(0) = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$y := \mathrm{odesolve}\left(t, \frac{\pi}{2}\right)$$

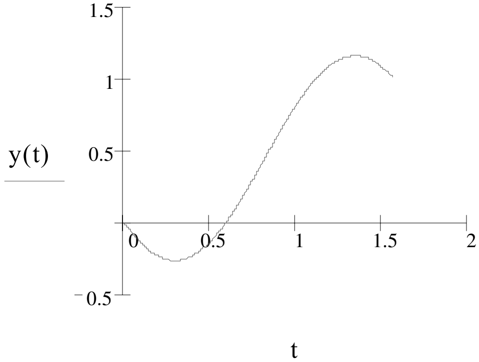


Рис. 11.5. График решения

Пример 11.5. Решить граничную задачу для дифференциального уравнения второго порядка $y''(x) - \cos(x)\,y'(x) + y(x) = \sin x/2$, $y(0) = 0$, $y'(\pi/2) = 1$ и построить график решения.

Given

$$y''(x) - \cos(x) \cdot y'(x) + y(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(2 \cdot \pi) = 1$$

$$y := \text{odesolve}(x, 2 \cdot \pi)$$

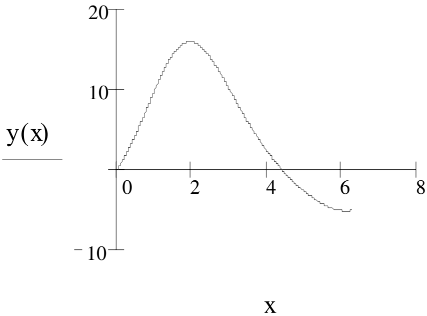


Рис. 11.6. График решения

Например, если граничные условия имеют непростое представление, то граничную задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка можно либо методом вариации постоянных, либо методом дифференциальной прогонки свести к решению нескольких задач Коши.

Согласно методу вариации постоянных общее решение граничной задачи

$$y''(x)+h(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x), \quad a<x<b, \tag{11.1}$$

$$\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(x)=A, \quad \beta_0 y(b)+\beta_1(x)\,y'(b)=B \tag{11.2}$$

можно представить в виде

$$y(x)= Z(x)+C_1 Zl(x)+C_2 Z2(x), \tag{11.3}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, $Z(x)$, $Z_1(x)$, $Z_2(x)$ – решения следующих задач Коши:

$$Z''(x)+h(x)Z'(x)+q(x)Z(x)=f(x), \tag{11.4}$$

$$Z(a)=0, \quad Z'(a)=0,$$

$$Zl''(x)+h(x)Zl'(x)+q(x)Zl(x)=0, \tag{11.5}$$

$$Z(a)=0, \quad Z'(a)=1,$$

$$Zl''(x)+h(x)Zl'(x)+q(x)Zl(x)=0, \tag{11.6}$$

$$Z(a)=1, \quad Z'(a)=0.$$

Для определения произвольных постоянных C_1, C_2 подставим представление (11.3) в граничные условия (11.2) и получим систему для определения этих величин.

Пример 11.6. Методом вариации постоянных найти решение граничной задачи $y''(x)+(x+1)y'(x)-2y(x)=2$, $y(0)-y'(0)=-1$, $y(1)=4$ и построить график решения.

Решение задачи Коши (11.4):

Given

$$Z''(x)+(x+1)Z(x)-2\cdot Z(x)=2$$

$Z(0) = 0 \quad Z'(0) = 0$

$Z := \mathrm{odesolve}(x, 1) \qquad Z(1) = 1.034$

Решение задачи Коши (11.5):

Given

$$\frac{d^2}{dx^2} Z1(x) + (x+1)Z1(x) - 2 \cdot Z1(x) = 0$$

$Z1(0) = 0 \qquad Z1'(0) = 1$

$Z1 := \mathrm{odesolve}(x, 1, 0.01) \qquad Z1(1) = 1.085$

Решение задачи Коши (11.6):

Given

$$\frac{d^2}{dx^2} Z2(x) + (x+1)Z2(x) - 2 \cdot Z2(x) = 0$$

$Z2(0) = 1 \qquad Z2'(0) = 0$

$Z2 := \mathrm{odesolve}(x, 1, 0.01) \qquad Z2(1) = 1.347$

Нахождение произвольных постоянных

$C1 := 0 \quad C2 := 0$

Given

$-C1 + C2 = -1$

$Z(1) + C1 \cdot Z1(1) + C2 \cdot Z2(1) = 4$

$C := \mathrm{Find}(C1, C2) \qquad C = \begin{pmatrix} 1.773 \\ 0.773 \end{pmatrix}$

Приближенное решение в некоторых точках:

$x := 0, 0.1 .. 1$

$x =$	$Z(x) + C_0 \cdot Z1(x) + C_1 \cdot Z2(x)$
0	0.773117
0.1	0.964457
0.2	1.184465
0.3	1.433928
0.4	1.713403
0.5	2.023124
0.6	2.362919
0.7	2.732117
0.8	3.129454
0.9	3.552986
1	4

График приближенного решения

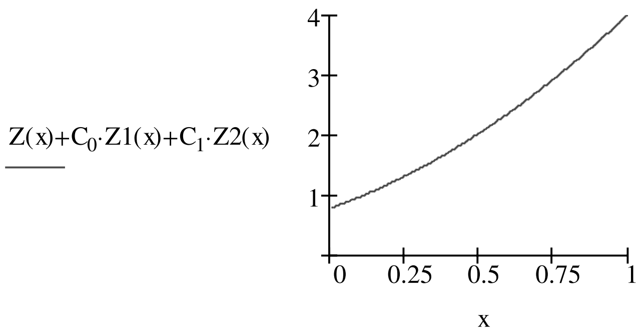


Рис. 11.7. График решения

Согласно методу дифференциальной прогонки решение граничной задачи (11.1) - (11.2) при условии $\alpha_1 \neq 0$ состоит из решения следующих задач Коши:

$$Z1'(x) = -Z1^2(x) - p(x)Z1(x) - q(x),\ Z1(a) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \qquad (11.7)$$

$$Z2'(x) = -Z2(x)(Z1(x) + p(x)) + f(x),\ \ Z2(a) = \frac{A}{\alpha_1}. \qquad (11.8)$$

Используя найденные функции $Z1(x), Z2(x)$, находим решение исходной граничной задачи как решение задачи Коши

$$y'(x) = Z1(x)y(x) + Z2(x), \qquad y(b) = \frac{B - \beta_1 Z2(b)}{\beta_0 + \beta_1 Z1(b)}. \qquad (11.9)$$

Пример 11.7. Методом дифференциальной прогонки найти решение граничной задачи $y''(x) + (x^2 + 1)y'(x) - xy(x) = 2$, $y(0) - y'(0) = -1,\ \ y(1) = 5$.

Решение задачи Коши (11.7):

Given

$$\frac{d}{dx}Z1(x) = -Z1(x)\cdot\left(Z1(x) + x^2 + 1\right) + x$$

$$Z1(0) = 1$$

$$Z1 := \text{odesolve}(x, 1)$$

Решение задачи Коши (11.8):

Given

$$\frac{d}{dx}Z2(x) = -Z2(x)\cdot\left(Z1(x) + x^2 + 1\right) + 2$$

$$Z2(0) = 1$$

$$Z2 := \text{odesolve}(x, 1)$$

Решение задачи Коши (11.9):

Given

$$\frac{d}{dx}y(x) = Z1(x)\,y(x) + Z2(x)$$

$$y(1) = 5$$

$$y := \text{odesolve}\,(x, 0)$$

Приближенное решение в некоторых точках:

$$x := 0, 0.2 .. 1$$

x =	y(x) =
0	2.058853
0.2	2.6538
0.4	3.228457
0.6	3.801894
0.8	4.388953
1	5

Согласно методу конечных разностей граничная задача (11.1) – (11.2) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$y_{i+1} + m_i y_i + k_i y_i = h^2 F_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

где

$$m_i = \frac{2h^2 q_i - 4}{2 + hp_i}, \qquad k_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}, \qquad F_i = \frac{2f_i}{2 + hp_i},$$

$$x_i = a + ih, \quad q_i = q(x_i), \quad p_i = p(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad h = (b - a)/n.$$

Полученная система решается методом прогонки. Сначала выполняется прямой метод прогонки. Находим коэффициенты C_i, D_i по формулам

$$C_o = \frac{\alpha_1}{h\alpha_0 - \alpha_1}, \qquad D_0 = \frac{Ah}{\alpha_1},$$

$$C_i = \frac{1}{m_i - k_i C_{i-1}}, \quad D_i = h^2 F_i - k_i C_{i-1} D_{i-1}.$$

Обратный ход метода прогонки – нахождение приближенного решения граничной задачи в точках x_i, $i = n, \ldots, 0$ по формулам

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 C_{n-1} D_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (C_{n-1} + 1)}, \quad y_i = C_i (D_i - y_{i-1}), \; i = n-1, \ldots, 0.$$

Пример 11.8. Методом прогонки решить граничную задачу

$$y''(x) + xy'(x) - \frac{y(x)}{2x} = 1, \quad y(2) + 2y'(2) = 1, \quad y(2.3) = 2.15.$$

Исходные данные

$\alpha_0 := 1 \quad \alpha_1 := 2 \quad \beta_0 := 1 \quad \beta_1 := 0 \quad A := 1 \quad B := 2.5$

$a := 2 \qquad b := 2.3$

$h := 0.05 \qquad n := \dfrac{b-a}{h} \qquad n = 6$

Формирование элементов матрицы

$i := 1..n-1 \qquad x_i := a + h\cdot i$

$p_i := x_i \qquad q_i := \dfrac{-1}{2\cdot x_i} \qquad f_i := 1$

$m_i := \dfrac{2\cdot h^2\cdot q_i - 4}{2 + h\cdot p_i} \qquad k_i := \dfrac{2 - h\cdot p_i}{2 + h\cdot p_i} \qquad F_i := 2\cdot\dfrac{f_i}{2 + h\cdot p_i}$

Прямой ход метода прогонки

$$c_0 := \frac{\alpha_1}{h \cdot \alpha_0 - \alpha_1} \qquad d_0 := A \cdot \frac{h}{\alpha_1} \qquad c_0 = -1.026 \qquad d_0 = 0.0$$

$$i := 1 .. n-1$$

$$c_i := \frac{1}{m_i - k_i \cdot c_{i-1}} \qquad d_i := h^2 \cdot F_i - k_i \cdot c_{i-1} \cdot d_{i-1}$$

Обратный ход метода прогонки

$$y_n := 2.15 \qquad i := n-1, n-2 .. 0 \qquad y_i := c_i \cdot (d_i - y_{i+1})$$

Приближенное решение граничной задачи

$$i := 0 .. n \qquad x_i := a + h \cdot i$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.05 \\ 2.1 \\ 2.15 \\ 2.2 \\ 2.25 \\ 2.3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 2.249058 \\ 2.217832 \\ 2.193314 \\ 2.174859 \\ 2.161858 \\ 2.153747 \\ 2.15 \end{pmatrix}$$

График решения

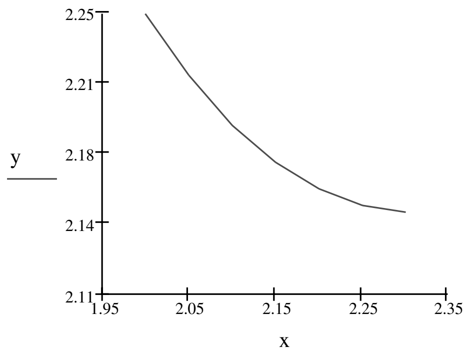


Рис. 11.8. График решения

11.2. **Решение задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений**

Для численного решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)), \end{cases} \qquad (11.10)$$

$$y_1(a) = y_{10}, \quad y_2(a) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(a) = y_{n0},$$

имеется встроенная функция rkfixed, использующая метод Рунге-Кутта.

Если решение задачи Коши для системы ОДУ является гладкой функцией, то для численного решения этой задачи лучше использовать встроенную функцию Bulstoer, использующую метод Bulirsch- Stoer (Булирша-Штера).

Если известно, что решение задачи Коши для системы (11.10) достаточно гладкое, то лучше использовать встроенную функцию Rdadapt. В отличие от функции, которая ищет приближенное решение с постоянным шагом, функция Rkadapt вычисляет приближенные решения на более мелкой сетке на тех участках отрезка, где значения функции меняются быстро, и на более крупной – на тех участках отрезка, где функция меняется медленно. Это позволяет повысить точность вычислений и сократить время вычислений.

Для приближенного решения жестких систем ОДУ используются встроенные функции Stiffr, Stffb.

Если необходимо найти приближенное решение задачи Коши только в конечной точке отрезка, то используются встроенные функции bulstoer, rkadapt, stiffb, stiffr.

Обращения к вышеперечисленным встроенным функциям:

· rkfixed(y, a, в, npoints, D) – решение задачи Коши на отрезке методом Рунге-Кутта с постоянным шагом;

· Bulstoer(y, a, в, npoints, D) – решение задачи Коши на отрезке методом Bulirsch-Stoer;

· Rkadapt(y, a, в, npoints, D) – решение задачи Коши на отрезке методом Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага;

· Stiffr(y, a, b, acc, D, J) – решение задачи Коши для жестких систем ОДУ на отрезке с использованием алгоритма Rosenbrock;

· Stiffb(y, a, b, acc, D, J) – решение задачи Коши для жестких систем ОДУ на отрезке с использованием алгоритма Bulirsch-Stoer;

· rkadapt(y, a, в, acc, D, kmax, save) – решение задачи Коши в заданной точке методом Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага;

· bulstoer(y, a, в, acc, D, kmax, save) – решение задачи Коши в заданной точке методом Булирша-Штера;

· stiffr(y, a, в, acc, D, J, kmax, save) – решение задачи Коши для жестких систем ОДУ в заданной точке с использованием алгоритма Rosenbrock;

· stiffb(y, a, в, acc, D, J, kmax, save) – решение задач для жестких систем в заданной точке с использованием алгоритма Булирша-Штера.

Смысл параметров для всех функций одинаков и определяется математической постановкой задачи:

· y – вектор начальных условий размерности n, где n – число уравнений в системе (11.10);

· a, b – начальная и конечная точки отрезка интегрирования системы;

· npoints – число точек, не считая начальной точки, в которых ищется приближенное решение. Этот аргумент определяет число строк (npoints+1) в возвращаемой матрице;

· D – имя вектор-функции D(x,y) правых частей системы (11.10);

· J – имя матрицы-функции J(x,y) размерности n * (n+1), в первом столбце которой хранятся выражения частных производных по x правых частей системы, а в остальных n столбцах содержится матрица Якоби правых частей;

· acc – параметр, контролирующий погрешность решения при автоматическом выборе шага интегрирования (если погрешность решения больше acc, то шаг сетки уменьшается; шаг уменьшается до тех пор, пока его значение не станет меньше save);

· kmax – максимальное число узлов сетки, в которых может быть вычислено решение задачи на отрезке;

· save – наименьшее допустимое значение шага неравномерной сетки.

Результат работы функций – матрица, содержащая n+1 столбцов; ее первый столбец содержит координаты узлов сетки, второй – вычисленные приближенные значения решения $y_1(x)$ в узлах сетки, (k+1)-й столбец – значения решения $y_k(x)$ в узлах сетки.

Пример 11.9. Решить методом Рунге-Кутта задачу Коши для нормальной системы ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} y_1 = \sin(x^2 + y_2^2), \\ \dfrac{d}{dx} y_2 = \cos(x y_1), \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0.5$ на отрезке $[0, 4]$ с шагом $h = 0.1$. Вывести некоторые значения и построить графики функций.

ORIGIN := 1

Начальные условия

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Вектор правых частей

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} \sin\left[x^2 + (y_2)^2\right] \\ \cos(x \cdot y_1) \end{bmatrix}$$

Решение поставленной задачи

$Y := \text{rkfixed}(y, 0, 4, 40, D)$

Численные значения (первый столбец – значения x, второй – значения функции $y_1(x)$, третий – значения функции $y_2(x)$).

$Y =$

	1	2	3
1	0	1	0.5
2	0.1	1.030165	0.599826
3	0.2	1.073235	0.69853
4	0.3	1.131406	0.79469
5	0.4	1.205133	0.886362
6	0.5	1.292515	0.970872
7	0.6	1.389155	1.044747
8	0.7	1.488874	1.103925
9	0.8	1.585272	1.144322
10	0.9	1.673452	1.162615
11	1	1.750961	1.1569
12	1.1	1.817559	1.127028
13	1.2	1.874183	1.074612

Графики функций

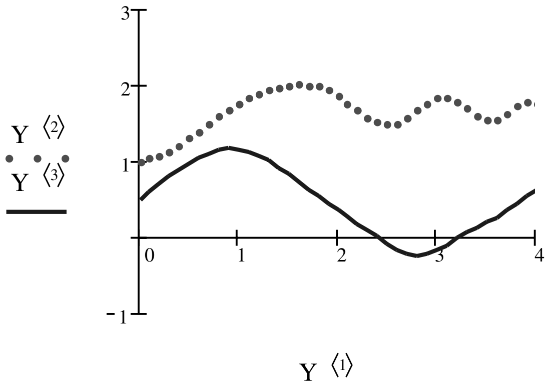


Рис. 11.9. Графики решения

Пример 11.10. Решить методом Bulirsch-Stoer задачу Коши для системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}y_1 = 3y_1 - y_2 + y_3 + x, \\ \dfrac{d}{dx}y_2 = y_1 + y_2 + y_3 + \sin(x), \\ \dfrac{d}{dx}y_1 = 4y_1 - y_2 + 4y_3, \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0) = 0{,}34, \ \ y_2(0) = -0{,}16, \ \ y_3(0) = 0{,}27$ на отрезке [0; 0,8]. Построить графики функций.

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad y := \begin{pmatrix} 0.34 \\ -0.16 \\ 0.27 \end{pmatrix}$$

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} 3 \cdot y_1 - y_2 + y_3 + x \\ y_1 + y_2 + y_3 + \sin(x) \\ 4 \cdot y_1 - y_2 + 4 \cdot y_3 \end{pmatrix} \quad Y := \text{Bulstoer}(y, 0, 0.8, 100, D)$$

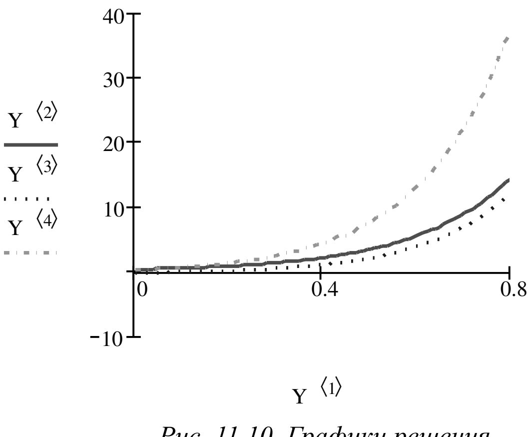


Рис. 11.10. Графики решения

Пример 11.11. Решить задачу Коши для жесткой системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} y_1 = -2y_1 - 998y_2, \\ \dfrac{d}{dx} y_2 = -1000y_2, \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1$ на отрезке [0, 0.01]. Построить графики функций.

$$ORIGIN := 1 \qquad y := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(x,y) := \begin{pmatrix} -2 \cdot y_1 - 998 \cdot y_2 \\ -1000 \cdot y_2 \end{pmatrix} \qquad J(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & -2 & -9\text{!} \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$Y := Stiffr(y, 0, 0.01, 1000, D, J)$$

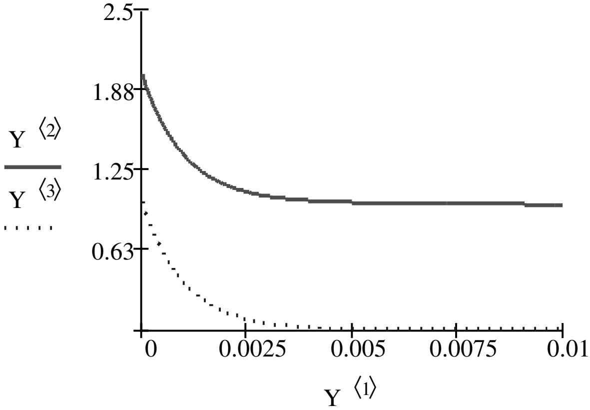


Рис. 11.11. Графики решения

11.3. **Автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений**

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется автономной, если независимая переменная явно не входит в правую часть системы.

Рассмотрим автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} = f_1(y_1(t), y_2(t)), \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} = f_2(y_1(t), y_2(t)). \end{cases} \tag{11.11}$$

Пусть $y_1(t) = \varphi_1(t)$, $y_2(t) = \varphi_2(t)$ – решение системы (11.11). Кривая, заданная в параметрическом виде

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(t), \\ y_2 = \varphi_2(t), \\ t = t, \end{cases} \tag{11.12}$$

называется интегральной кривой в трехмерном пространстве $0y_1y_2t$.

Проекция интегральной кривой (11.12) на плоскость (фазовая плоскость) $0y_1y_2$ называется фазовой кривой, или фазовой траекторией системы.

Пример 11.12. Построить графики решения, интегральную кривую и фазовую траекторию автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} = \sin y_1 + 2, \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} = \sin y_1 + \cos y_2, \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$ на отрезке $[0,18]$.

Начальные условия

ORIGIN:= 1

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор правых частей

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} \sin(y_1) + 2 \\ \sin(y_1) + \cos(y_2) \end{pmatrix}$$

Решение системы

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 18, 100, D)$

Графики решений: $y_1(t)$ (верхний график), $y_2(t)$.

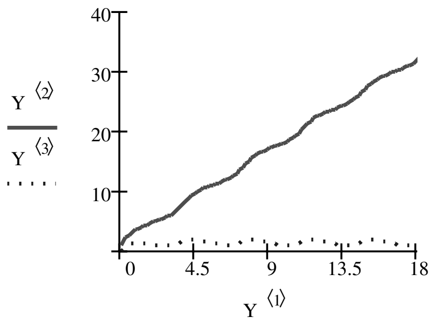
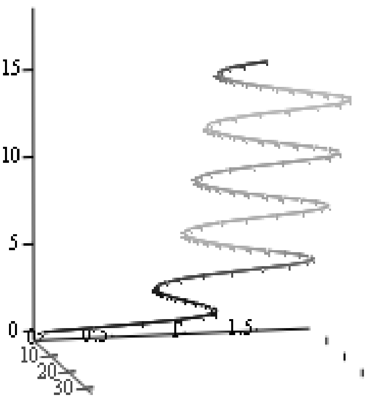


Рис. 11.12. Графики решения

Интегральная кривая в пространстве $0y_1y_2t$



$(Y^{\langle 2\rangle}, Y^{\langle 3\rangle}, Y^{\langle 1\rangle})$

Рис. 11.13. Интегральная кривая

Фазовая траектория автономной системы

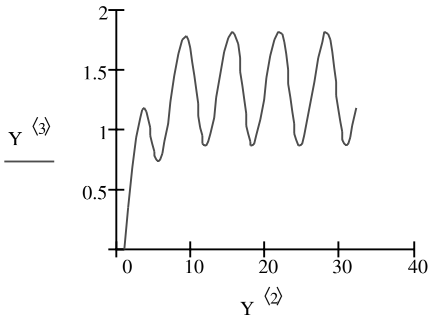


Рис. 11.14. Фазовая траектория

Пример 11.13. Построить графики решения и фазовой траектории системы Вольтерра-Лотка

$$\begin{cases} y_1'(t) = (a - by_2(t))y_1(t), \\ y_2'(t) = (-c + dy_1(t))y_2(t), \end{cases}$$

где a, b, c, d – положительные числа, с начальными условиями

$y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 2.$

Исходные данные

ORIGIN := 1

a := 2 b := 3 c := 1 d := 5

Начальные данные

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решение поставленной задачи

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot y_2) \cdot y_1 \\ (-c + d \cdot y_1) \cdot y_2 \end{bmatrix}$$

Y := rkfixed(y, 0, 18, 2000, D)

Графики решения

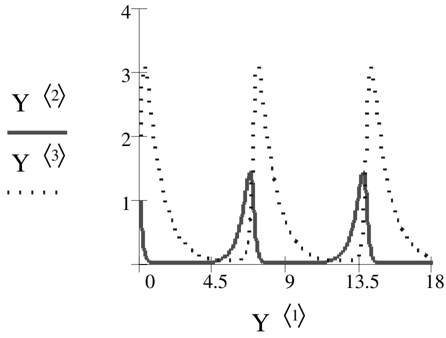


Рис. 11.15. Графики решения

Фазовая траектория системы

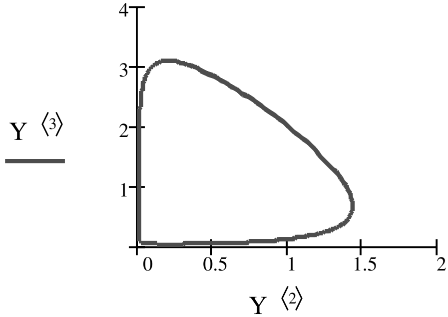


Рис. 11.16. Фазовая траектория

Известно, что линейная автономная система с невырожденной матрицей

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t), \\ y_2'(t) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) \end{cases}$$

имеет единственную точку покоя (0, 0).

Характер точки покоя можно установить по собственным значениям матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Векторное поле автономной системы задает в каждой точке плоскости $0y_1y_2$ направление касательной к фазовой траектории системы, проходящей через эту точку. Точки векторного поля, в которых векторное поле нулевое, называются особыми точками векторного поля. Точки покоя автономной системы являются особыми точками векторного поля.

Пример 11.14. Определить характер точки покоя линейной автономной системы

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t), \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t) \end{cases}$$

и изобразить фазовые кривые и векторное поле.

Вычисление собственных значений

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad eigenvals(A) = \begin{pmatrix} 2.646i \\ -2.646i \end{pmatrix}$$

Собственные значения, комплексные числа и действительная часть равна нулю. Точка покоя устойчива, но не асимптотически устойчива и называется центром [2, 3]

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 - 4 \cdot y_2 \\ 2 \cdot y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

Решение автономной системы для различных начальных значений

$$x := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X1 := rkfixed(x, -2, 2, 200, D)$$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad X2 := rkfixed(x, -2, 2, 200, D)$$

$$x := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X3 := rkfixed(x, -2, 2, 200, D)$$

$$x := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X4 := rkfixed(x, -2, 2, 200, D)$$

Фазовые траектории системы

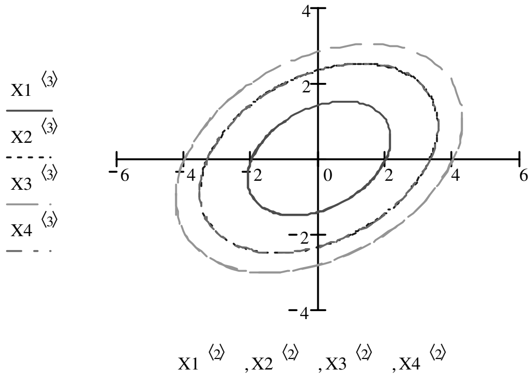


Рис. 11.17. Фазовые траектории

Построение векторного поля

$i := 1 .. 20$

$y1_i := -2 + 0.2 \cdot i$ $\qquad$ $y2_j := -2 + 0.2 \cdot j$

$Y1_{(i,\,j)} := y1_i - 4 \cdot y2_j$ $\qquad$ $Y2_{(i,\,j)} := 2 \cdot y1_i - y2_j$

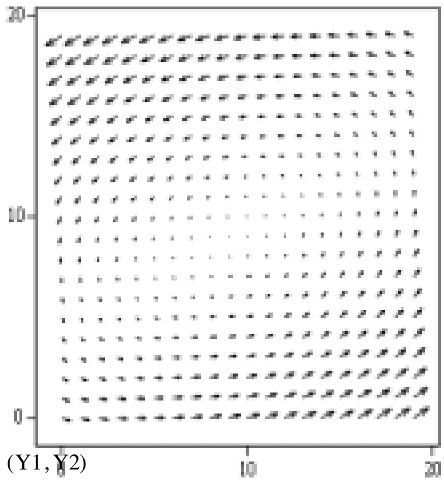


Рис. 11.18. Векторное поле

11.4. **Аналитическое решение дифференциальных уравнений**

Решение некоторых дифференциальных уравнений можно получить в аналитическом виде.

Уравнение в виде

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int P(x)dx + \int Q(x)dy = C.$$

Пример 11.15. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(1 - e^{2x})y^2dy - e^xdx = 0 \cdot$$

Общий интеграл дифференциального уравнения

$$F(x, y, C) := \int y^2\,dy - \int \frac{e^x}{1 + e^{2\cdot x}}\,dx - C$$

Аналитическое решение уравнения

$$F(x, y, C) \to \frac{1}{3}\cdot y^3 - \operatorname{atan}(\exp(x)) - C$$

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Общее решение этого уравнения

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx + C\right),$$

где $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Пример 11.16. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dy(x)}{dx} - \frac{2}{x}y(x) = 2x^3.$$

Исходные данные

$$p(x) := \frac{-2}{x} \qquad q(x) := 2\cdot x^3$$

$$\mu(x) := e^{\int p(x)\,dx}$$

Общее решение

$$y(x,C) := \frac{1}{\mu(x)}\cdot\left(\int q(x)\cdot\mu(x)\,dx + C\right)$$

$$y(x,C) \to x^2\cdot\left(x^2 + C\right)$$

Используя преобразование Лапласа, можно найти аналитическое решение задачи Коши.

Пример 11.17. С помощью преобразования Лапласа найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \sin t, \qquad y(0) = 0.$$

Находим прямое преобразование Лапласа

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) - \sin(t)$$

has Laplace transform

$$s\cdot laplace(y(t),t,s) - y(0) + laplace(y(t),t,s) - \frac{1}{\left(s^2+1\right)}$$

Введем обозначение L = laplace(y(t),t,s), примем во внимание начальное условие и решим полученное уравнение относительно L.

В результате получим

$$s\cdot L + L - \frac{1}{s^2+1} \quad \text{has solution(s)} \quad \frac{1}{\left[\left(s^2+1\right)\cdot(s+1)\right]}$$

Применим к полученному выражению обратное преобразование Лапласа и получим аналитическое решение исходной задачи

$$\frac{1}{\left[\left(s^2+1\right)\cdot(s+1)\right]} \quad \text{has inverse Laplace transform} \quad \frac{1}{2}\cdot\exp(-t) - \frac{1}{2}\cdot\cos(t) + \frac{1}{2}\cdot\sin(t)$$

Пример 11.18. Найти аналитическое решение задачи Коши

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = t^2e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

Выполняем прямое преобразование Лапласа

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\cdot\frac{d}{dt}y(t) + 4\cdot y(t) - t^2\cdot e^{-2\cdot t}$$

has Laplace transform

$$s\cdot(s\cdot \text{laplace}(y(t),t,s) - y(0)) - \left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t \leftarrow 0} + 4\cdot s\cdot\text{laplace}(y(t),t,s) - 4\cdot y(0) + 4\cdot\text{laplace}(y(t),t,s)$$

Введем обозначение L = laplace(y(t),t,s), примем во внимание начальное условие и решим полученное уравнение относительно L. В результате получим

$$s\cdot(s\cdot L) + 4\cdot s\cdot L + 4\cdot L - \frac{2}{(s+2)^3} \quad \text{has solution(s)} \quad \frac{2}{\left[(s+2)^3\cdot\left(s^2+4\cdot s+4\right)\right]}$$

Получение аналитического решения исходной задачи

$$\frac{2}{\left[(s+2)^3\cdot\left(s^2+4\cdot s+4\right)\right]} \quad \text{has inverse Laplace transform} \quad \frac{1}{12}\cdot t^4\cdot\exp(-2\cdot t)$$

12. **Программирование в MathCAD**

MathCAD располагает возможностью для создания программных блоков (модулей). Средства программирования расположены в панели **Programming** (рис. 12.1).

Рис. 12.1. Панель Programming

Программный модуль есть ни что иное, как функция пользователя с именем и параметрами, выделенными в тексте жирной вертикальной чертой. В модуле можно присваивать значения локальным переменным, создавать условные переходы, циклы.

Оператор *Add Line* создает программный блок.

Оператор ← – оператор локального присвоения. Локальная переменная определена только внутри блока и при выходе из блока теряет свое значение.

Оператор *if* – условный оператор, который создает конструкцию вида ▪ *if* ▪ . Если условие выполняется, то возвращается значение выражения слева. Совместно с оператором *if* можно использовать оператор иного выбора *otherwise*. Оператор *if* совместно с оператором *otherwise* образует конструкцию

Если .... То .... Иначе.

Пример 12.1. Построить график функции

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } |x| \le 1, \\ x^2 - 1, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Конструирование пользовательской функции, используя операторы *if* и *otherwise*

$$y(x) := \begin{vmatrix} \sqrt{1-x^2} \ \text{ if } \ |x| \le 1 \\ x^2 - 1 \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

График функции

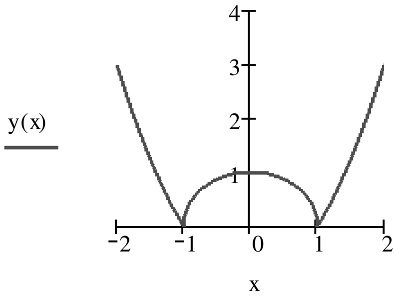


Рис. 12.1. График функции

Оператор *for* – оператор цикла с заданным числом повторений. Конструкция оператора *for*

$$\text{for } \blacksquare \in \blacksquare$$
$$\blacksquare$$

Первый операнд – переменная цикла, и ее значения определяются во втором операнде первой строки. Третий операнд (вторая строка) – тело цикла.

Пример 12.2. Найти среднее арифметическое значение функции

$$y(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } 0 \le x \le \pi/4, \\ \sin x, & \text{если } x > \pi/4 \end{cases}$$

в точках $x_i = 0{,}2i$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Пользовательская функция

$$f(x) := \begin{vmatrix} \cos(x) \ \text{ if } \ (x \ge 0) \cdot \left(x \le \dfrac{\pi}{4} \right) \\ \sin(x) \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

Вычисление среднего арифметического

$$SumA(n) := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1..n \\ \quad S \leftarrow S + f(0.2 \cdot k) \\ \dfrac{S}{n} \end{array} \right.$$

$$SumA(10) = 0.90855$$

Оператор *while* – оператор циклов, действующий до тех пор, пока выполняется некоторое условие. Условие проверяется перед началом каждого цикла. Конструкция оператора *while*

$$\begin{array}{l} \text{while } \blacksquare \\ \quad \blacksquare \end{array}$$

Первый операнд – условие. Второй – тело цикла.

Пример 12.3. Вычислить квадратный корень из числа A с точностью 0.00001, используя итерационную формулу

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{A}{2x_{n-1}} .$$

$$KvK(a) := \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow \dfrac{a}{2} \\ R \leftarrow 1 \\ \text{while } |R| > 0.00001 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow \dfrac{x0}{2} + \dfrac{a}{2 \cdot x0} \\ R \leftarrow |x1 - x0| \\ x0 \leftarrow x1 \end{array} \right. \\ x1 \end{array} \right.$$

$KvK(3) = 1.732051$ $\sqrt{3} = 1.732051$

$KvK(12) = 3.464102$ $\sqrt{12} = 3.464102$

Оператор *break* служит для преждевременного завершения цикла, чтобы избежать, например, зацикливания или слишком продолжительных вычислений.

Пример 12.4. Найти номер и значение первого элемента в числовом массиве, который находится в диапазоне $0.2 \le a_i \le 0.4$.

Создание числового массива, используя встроенную функцию rnd(1), генерирующую случайные числа в диапазоне от 0 до 1.

$i := 1..10$

$a_i := rnd(1)$

a =

	0
0	0
1	$1.268 \cdot 10^{-3}$
2	0.193
3	0.585
4	0.35
5	0.823
6	0.174
7	0.71
8	0.304
9	0.091
10	0.147

Пользовательская функция

$$NN(a) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..last(a) \\ \quad \text{break if } (a_k \ge 0.2) \cdot (a_k \le 0.4) \\ \begin{pmatrix} k \\ a_k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Результаты вычислений

$$\mathrm{NN}(a) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

Оператор continue позволяет прервать выполнение текущей итерации и перейти к выполнению следующей итерации.

Пример 12.5. Найти минимальный и максимальный элементы в числовом массиве.

Исходный числовой массив

$i := 0..10 \qquad a_i := \mathrm{rnd}(4)$

$a^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3.824	2.157	1.848	3.449	3.119	3.987	2.446	1.065	3.36

```
minmax(a) := | min ← a0
             | max ← a0
             | for k ∈ 1 .. last(a)
             |    | if ak < min
             |    |    | min ← ak
             |    |    | continue
             |    | max ← ak  if  ak > max
             | (min)
             | (max)
```

$$\mathrm{minmax}(a) = \begin{pmatrix} 1.065 \\ 3.987 \end{pmatrix}$$

Оператор *on error* служит для обработки ошибочных ситуаций типа «деления на нуль». Конструкция оператора

$$\text{exp} - 2 \quad \text{on error}\ \text{exp} - 1\,.$$

Если при выполнении exp – 1 произошла ошибка, то вычисляется exp – 2.

Пример 12.7. Вычислить сумму $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$, если $a_i \neq 0$, и найти количество нулевых элементов в числовом массиве a_i, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Исходный массив

$$v^T := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{SumRec}(v) := \left| \begin{array}{l} su \leftarrow 0 \\ j \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0..\mathrm{last}(v) \\ \quad j \leftarrow j + 1 \quad \text{on error}\ su \leftarrow su + \dfrac{1}{v_k} \\ \begin{pmatrix} su \\ j \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{SumRec}(v) = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Оператор *return* служит для преждевременного завершения программного блока.

Пример 12.8. Найти все простые числа, не превосходящие n.

$$
PN(n) := \left|
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ if } n = 2 \\
\text{if } n > 2 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
a_n \leftarrow 0 \\
r \leftarrow PN\left(\mathrm{ceil}\left(\sqrt{n}\right)\right) \\
\text{for } i \in 2..\mathrm{length}(r) \\
\quad \text{for } j \in 2..\dfrac{n}{r_{i-1}} \\
\qquad a_{r_{i-1} \cdot j} \leftarrow 1 \\
j \leftarrow 1 \\
\text{for } i \in 2..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\text{if } a_i = 0 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
q_j \leftarrow i \\
j \leftarrow j + 1
\end{array}
\right. \\
1
\end{array}
\right. \\
q
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

$$N := 25 \qquad\qquad Pn := PN(N)$$

$Pn^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	2	3	5	7	11	13	17	19	23

Системные переменные

p = 3,14159 ...	Число p. В численных расчетах Mathcad испо зует значение p с учетом 15 значащих цифр. символьных вычислениях p сохраняет свое то ное значение
e = 2,71828 ...	Основание натуральных логарифмов. В числе ных расчетах Mathcad использует значение учетом 15 значащих цифр. В символьных в числениях e сохраняет свое точное значение
	Бесконечность. В численных расчетах это данное большое число (10307). В символьн вычислениях — бесконечность
% = 0,01	Процент. Используется в выражениях, подобн 10%, или как масштабирующий множитель в поле, отводимом для единиц размерности
TOL = 10-3	Допускаемая погрешность для различных алго ритмов аппроксимации (интегрирования, реш ния уравнений, и т.д.)
ORIGIN = 0	Определяет индекс первого элемента векторов матриц
CTOL = 10-3	Допускаемая погрешность для равенств и нера венств, входящих в решение оптимизационны задач с ограничениями
PRNCOLWIDTH = 8	Ширина столбца, используемая при записи фа лов функцией WRITEPRN
PRNPRECISION = 4	Число значащих цифр, используемых при запи си файлов функцией WRITEPRN
FRAME = 0	Используется в качестве счетчика кадров при создании анимаций

РЕКОМЕНДУЕМАџ ЛИТЕРАТУРА

1. Аладьев В.З., Гершгорн Н.А. Вычислительные задачи на персональном компьютере. – Киев: Тэхника, 1991. – 245 с.

2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

3. Бярозкіна Н.С., Мінюк С.А. Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні. Т.1. – Гродна: ГрДУ, 2000. – 436 с.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1969. – 544 с.

5. Дьяконов В.П. MathCAD 8/2000: Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2000. – 592 с.

6. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998. – 575 с.

7. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Мн.: Выш. шк., 1987. – 319 с.

8. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1988. – 344 с.

9. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982. – 296 с.

10. Очков В.Ф. MathCAD 7 Pro для студентов и инженеров. – М.: Компьютер пресс, 1998. – 380 с.

11. Херхагер М., Партоль Х. MathCAD 2000: полное руководство. – Киев: BHV, 2000. – 416 с.

12. Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В. Интегрированный пакет MathCAD в учебном процессе // Мат. 1-ой междунар. науч. конф. препод. и студ. «Социально-экономическое развитие РБ на рубеже XX-XXI веков: анализ, перпективы». – Гродно: Гродненский филиал ИСЗ, 1997. – С. 240–241.

13. Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В. Символьные преобразования в пакете MathCAD //Компьютерная алгебра в фунда

ментальных и прикладных иследованиях и образовании: Тез. междунар. науч. конф. – Мн.: БГУ, 1997. – С.170–172.

14. Шушкевич Г.Ч. Использование пакета MathCAD для расчета электростатических полей системы проводников //Тр. 3 Междунар. конф. «Новые информационные технологии в образовании». Т. 1. – Мн.: БГЭУ, 1998. – С.112–113.

15. MathCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. – М.: ИИД «Филинъ», 1996. – 698 с.

16. Shushkevich G.Ch. Calculation of electrostatic problems with MATHCAD – Computer algebra in fundamental and applied research and education. Proceedings of second international scientific conference. – Minsk: BSU, 1999. – P.105–109.

17. Shushkevich G.Ch., Shushkevich S.V. Calculation of higher transcendental functions with the help of a package MATHCAD – Computer algebra in fundamental and applied research and education. Proceedings of second international scientific conference. – Minsk: BSU, 1999. – P.127–128.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шушкевич Геннадий Чеславович
Шушкевич Светлана Владимировна

Введение в MathCAD 2000

учебное пособие

Редактор Н.П.Дудко
Компьютерная вёрстка: Т.А.Коваленко

Сдано в набор 04.07.2001. Подписано в печать 01.10. 2001.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.печ.л. 8,0. Уч.-изд.л. 7,59.
Тираж 600 экз. Заказ .

Налоговая льгота — Общегосударственный классификатор
Республики Беларусь ОКРБ 007-98, ч.1, 22.11.20.600.

Учреждение образования
«Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы».
ЛВ №96 от 02.12.97
Ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно.

Отпечатано на технике издательского отдела Учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».
ЛП №111 от 29.12.97
Ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно.