

Электрические цепи постоянного тока и методы их расчета

1.1. Электрическая цепь и ее элементы

В электротехнике рассматривается устройство и принцип действия основных электротехнических устройств, используемых в быту и промышленности. Чтобы электротехническое устройство работало, должна быть создана электрическая цепь, задача которой передать электрическую энергию этому устройству и обеспечить ему требуемый режим работы.

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электрическом токе, ЭДС (электродвижущая сила) и электрическом напряжении.

Для анализа и расчета электрическая цепь графически представляется в виде электрической схемы, содержащей условные обозначения ее элементов и способы их соединения. Электрическая схема простейшей электрической цепи, обеспечивающей работу осветительной аппаратуры, представлена на рис. 1.1.

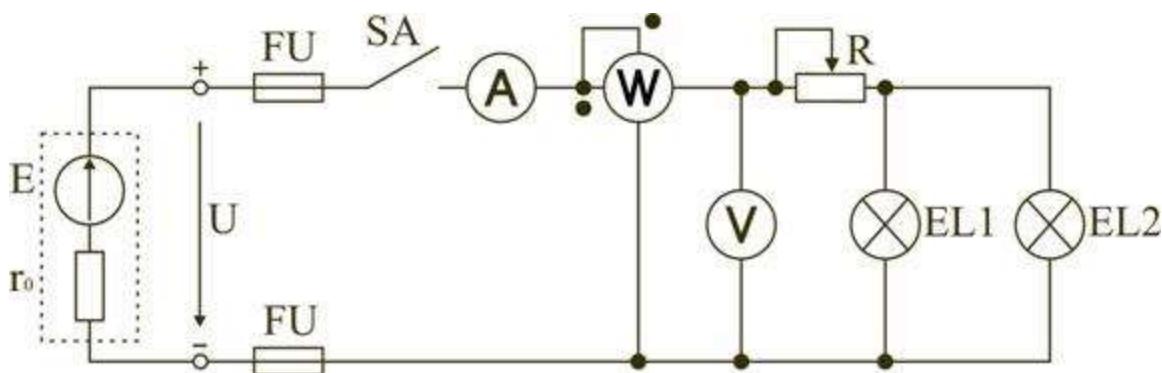


Рис. 1.1

Все устройства и объекты, входящие в состав электрической цепи, могут быть разделены на три группы:

1) Источники электрической энергии (питания).

Общим свойством всех источников питания является преобразование какого-либо вида энергии в электрическую. Источники, в которых происходит преобразование неэлектрической энергии в электрическую, называются первичными источниками. Вторичные источники – это такие источники, у которых и на входе, и на выходе – электрическая энергия (например, выпрямительные устройства).

2) Потребители электрической энергии.

Общим свойством всех потребителей является преобразование электроэнергии в другие виды энергии (например, нагревательный прибор). Иногда потребители называют нагрузкой.

3) Вспомогательные элементы цепи: соединительные провода, коммутационная аппаратура, аппаратура защиты, измерительные приборы и т.д., без которых реальная цепь не работает.

Все элементы цепи охвачены одним электромагнитным процессом.

В электрической схеме на рис. 1.1 электрическая энергия от источника ЭДС E , обладающего внутренним сопротивлением r_0 , с помощью вспомогательных элементов цепи передаются через регулировочный реостат R к потребителям (нагрузке): электрическим лампочкам $EL1$ и $EL2$.

1.2. Основные понятия и определения для электрической цепи

Для расчета и анализа реальная электрическая цепь представляется графически в виде расчетной электрической схемы (схемы замещения). В этой схеме реальные элементы цепи изображаются условными обозначениями, причем вспомогательные элементы цепи обычно не изображаются, а если сопротивление соединительных проводов намного меньше сопротивления других элементов цепи, его не учитывают. Источник питания показывается как источник ЭДС E с внутренним сопротивлением r_0 , реальные потребители электрической энергии постоянного тока заменяются их электрическими параметрами: активными сопротивлениями R, R_1, R_2, \dots, R_n . С помощью сопротивления R учитывают способность реального элемента цепи необратимо преобразовывать электроэнергию в другие виды, например, тепловую или лучистую.

При этих условиях схема на рис. 1.1 может быть представлена в виде расчетной электрической схемы (рис. 1.2), в которой есть источник питания с ЭДС E и внутренним сопротивлением r_0 , а потребители электрической энергии: регулировочный реостат R , электрические лампочки $EL1$ и $EL2$ заменены активными сопротивлениями R, R_1 и R_2 .

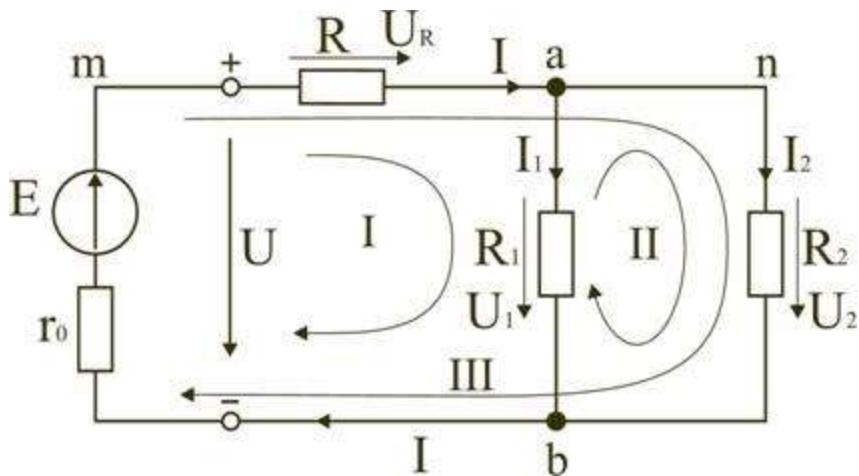


Рис. 1.2

Источник ЭДС на электрической схеме (рис. 1.2) может быть заменен источником напряжения U , причем условное положительное направление напряжения U источника задается противоположным направлению ЭДС.

При расчете в схеме электрической цепи выделяют несколько основных элементов.

Ветвь электрической цепи (схемы) – участок цепи с одним и тем же током. Ветвь может состоять из одного или нескольких последовательно соединенных элементов. Схема на рис. 1.2 имеет три ветви: ветвь bma , в которую включены элементы $r0, E, R$ и в которой возникает ток I ; ветвь ab с элементом $R1$ и током $I1$; ветвь anb с элементом $R2$ и током $I2$.

Узел электрической цепи (схемы) – место соединения трех и более ветвей. В схеме на рис. 1.2 – два узла a и b . Ветви, присоединенные к одной паре узлов, называют параллельными. Сопротивления $R1$ и $R2$ (рис. 1.2) находятся в параллельных ветвях.

Контур – любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям. В схеме на рис. 1.2 можно выделить три контура: I – bma ; II – $anba$; III – $manbm$, на схеме стрелкой показывают направление обхода контура.

Условные положительные направления ЭДС источников питания, токов во всех ветвях, напряжений между узлами и на зажимах элементов цепи необходимо задать для правильной записи уравнений, описывающих процессы в электрической цепи или ее элементах. На схеме (рис. 1.2) стрелками укажем положительные направления ЭДС, напряжений и токов:

- а) для ЭДС источников – произвольно, но при этом следует учитывать, что полюс (зажим источника), к которому направлена стрелка, имеет более высокий потенциал по отношению к другому полюсу;
- б) для токов в ветвях, содержащих источники ЭДС – совпадающими с направлением ЭДС; во всех других ветвях произвольно;
- в) для напряжений – совпадающими с направлением тока в ветви или элемента цепи.

Все электрические цепи делятся на линейные и нелинейные.

Элемент электрической цепи, параметры которого (сопротивление и др.) не зависят от тока в нем, называют линейным, например электропечь.

Нелинейный элемент, например лампа накаливания, имеет сопротивление, величина которого увеличивается при повышении напряжения, а следовательно и тока, подводимого к лампочке.

Следовательно, в линейной электрической цепи все элементы – линейные, а нелинейной называют электрическую цепь, содержащую хотя бы один нелинейный элемент.

1.3. Основные законы цепей постоянного тока

Расчет и анализ электрических цепей производится с использованием закона Ома, первого и второго законов Кирхгофа. На основе этих законов устанавливается взаимосвязь между значениями токов, напряжений, ЭДС всей электрической цепи и отдельных ее участков и параметрами элементов, входящих в состав этой цепи.

Закон Ома для участка цепи

Соотношение между током I , напряжением UR и сопротивлением R участка ab электрической цепи (рис. 1.3) выражается законом Ома

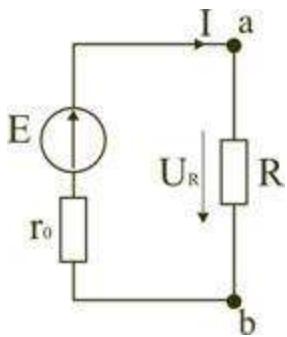


Рис. 1.3

(1.1)

$$I = \frac{U_R}{R} \text{ или } UR = RI.$$

В этом случае $UR=RI$ – называют напряжением или падением напряжения на резисторе R ,

а $I = \frac{U_R}{R}$ – током в резисторе R .

При расчете электрических цепей иногда удобнее пользоваться не сопротивлением R , а величиной обратной сопротивлению, т.е. электрической проводимостью:

$$g = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}.$$

В этом случае закон Ома для участка цепи запишется в виде:

$$I = Ug.$$

Закон Ома для всей цепи

Этот закон определяет зависимость между ЭДС E источника питания с внутренним сопротивлением r_0 (рис. 1.3), током I электрической цепи и общим эквивалентным сопротивлением $R_{\Theta}=r_0+R$ всей цепи:

(1.2)

$$I = \frac{E}{R_{\Theta}} = \frac{E}{r_0 + R}.$$

Сложная электрическая цепь содержит, как правило, несколько ветвей, в которые могут быть включены свои источники питания и режим ее работы не может быть описан только законом Ома. Но это можно выполнить на основании первого и второго законов Кирхгофа, являющихся следствием закона сохранения энергии.

Первый закон Кирхгофа

В любом узле электрической цепи алгебраическая сумма токов равна нулю

(1.3)

$$\sum_{k=1}^m I_k = 0$$

где m – число ветвей подключенных к узлу.

При записи уравнений по первому закону Кирхгофа токи, направленные к узлу, берут со знаком «плюс», а токи, направленные от узла – со знаком «минус». Например, для узла а (см. рис. 1.2) $I - I_1 - I_2 = 0$.

Второй закон Кирхгофа

В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжений на всех его участках

(1.4)

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^m R_k I_k = \sum_{k=1}^m U_k$$

где n – число источников ЭДС в контуре;

m – число элементов с сопротивлением R_k в контуре;

$U_k = R_k I_k$ – напряжение или падение напряжения на k -м элементе контура.

Для схемы (рис. 1.2) запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$E = UR + U_1.$$

Если в электрической цепи включены источники напряжений, то второй закон Кирхгофа формулируется в следующем виде: алгебраическая сумма напряжений на всех элементах контура, включая источники ЭДС равна нулю

(1.5)

$$\sum_{k=1}^m U_k = 0$$

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо:

- 1) задать условные положительные направления ЭДС, токов и напряжений;
- 2) выбрать направление обхода контура, для которого записывается уравнение;
- 3) записать уравнение, пользуясь одной из формулировок второго закона Кирхгофа, причем слагаемые, входящие в уравнение, берут со знаком «плюс», если их условные положительные направления совпадают с обходом контура, и со знаком «минус», если они противоположны.

Запишем уравнения по II закону Кирхгофа для контуров электрической схемы (рис. 1.2):

контур I: $E=RI+R1I1+r0I$,

контур II: $R1I1+R2I2=0$,

контур III: $E=RI+R2I2+r0I$.

В действующей цепи электрическая энергия источника питания преобразуется в другие виды энергии. На участке цепи с сопротивлением R в течение времени t при токе I расходуется электрическая энергия

(1.6)

$$W=I^2Rt.$$

Скорость преобразования электрической энергии в другие виды представляет электрическую мощность

(1.7)

$$P = \frac{W}{t} = I^2 R = UI$$

Из закона сохранения энергии следует, что мощность источников питания в любой момент времени равна сумме мощностей, расходуемой на всех участках цепи.

(1.8)

$$\sum EI = \sum I^2 R$$

Это соотношение (1.8) называют уравнением баланса мощностей. При составлении уравнения баланса мощностей следует учесть, что если действительные направления ЭДС и тока источника совпадают, то источник ЭДС работает в режиме источника питания, и произведение EI подставляют в (1.8) со знаком плюс. Если не совпадают, то источник ЭДС работает в режиме потребителя электрической энергии, и произведение EI подставляют в (1.8) со знаком минус. Для цепи, показанной на рис. 1.2 уравнение баланса мощностей запишется в виде:

$$EI = I_2(r_0 + R) + I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2.$$

При расчете электрических цепей используются определенные единицы измерения. Электрический ток измеряется в амперах (А), напряжение – в вольтах (В), сопротивление – в омах (Ом), мощность – в ваттах (Вт), электрическая энергия – ватт-час (Вт-час) и проводимость – в сименсах (См)

Кроме основных единиц используют более мелкие и более крупные единицы измерения: миллиампер ($1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$), килоампер ($1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A}$), милливольт ($1 \text{ mV} = 10^{-3} \text{ V}$), киловольт ($1 \text{ kV} = 10^3 \text{ V}$), килоом ($1 \text{ k}\Omega = 10^3 \text{ }\Omega$), мегаом ($1 \text{ M}\Omega = 10^6 \text{ }\Omega$), киловатт ($1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$), киловатт-час ($1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ Wh}$).

1.4. Способы соединения сопротивлений и расчет эквивалентного сопротивления электрической цепи

Сопротивления в электрических цепях могут быть соединены последовательно, параллельно, по смешанной схеме и по схемам «звезда», «треугольник». Расчет сложной схемы упрощается, если сопротивления в этой схеме заменяются одним эквивалентным сопротивлением $R_{экв}$, и вся схема представляется в виде схемы на рис. 1.3, где $R=R_{экв}$, а расчет токов и напряжений производится с помощью законов Ома и Кирхгофа.

Электрическая цепь с последовательным соединением элементов

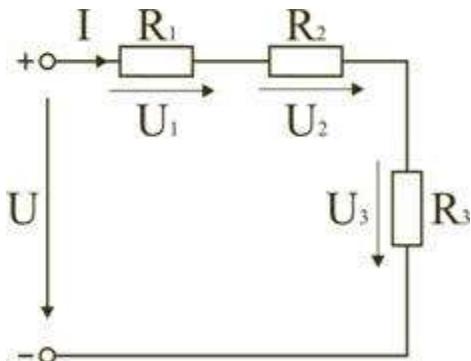


Рис. 1.4

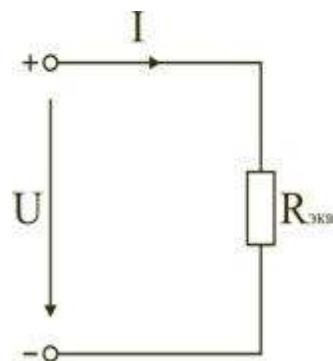


Рис. 1.5

Последовательным называют такое соединение элементов цепи, при котором во всех включенных в цепь элементах возникает один и тот же ток I (рис. 1.4).

На основании второго закона Кирхгофа (1.5) общее напряжение U всей цепи равно сумме напряжений на отдельных участках:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \text{ или } IR_{экв} = IR_1 + IR_2 + IR_3,$$

откуда следует

(1.5)

$$R_{экв} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Таким образом, при последовательном соединении элементов цепи общее эквивалентное сопротивление цепи равно арифметической сумме сопротивлений отдельных участков. Следовательно, цепь с любым числом последовательно включенных сопротивлений можно заменить простой цепью с одним эквивалентным сопротивлением $R_{экв}$ (рис. 1.5). После этого расчет цепи сводится к определению тока I всей цепи по закону Ома

$$I = \frac{U}{R_{экв}},$$

и по вышеприведенным формулам рассчитывают падение напряжений U_1, U_2, U_3 на соответствующих участках электрической цепи (рис. 1.4).

Недостаток последовательного включения элементов заключается в том, что при выходе из строя хотя бы одного элемента, прекращается работа всех остальных элементов цепи.

Электрическая цепь с параллельным соединением элементов

Параллельным называют такое соединение, при котором все включенные в цепь потребители электрической энергии, находятся под одним и тем же напряжением (рис. 1.6).

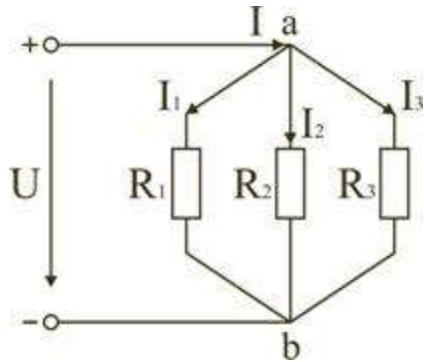


Рис. 1.6

В этом случае они присоединены к двум узлам цепи *a* и *b*, и на основании первого закона Кирхгофа (1.3) можно записать, что общий ток *I* всей цепи равен алгебраической сумме токов отдельных ветвей:

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \text{ т.е. } \frac{U}{R_{\text{экв}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3},$$

откуда следует, что

(1.6)

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

В том случае, когда параллельно включены два сопротивления R_1 и R_2 , они заменяются одним эквивалентным сопротивлением

(1.7)

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Из соотношения (1.6), следует, что эквивалентная проводимость цепи равна арифметической сумме проводимостей отдельных ветвей:

$$g_{\text{экв}} = g_1 + g_2 + g_3.$$

По мере роста числа параллельно включенных потребителей проводимость цепи дэкв возрастает, и наоборот, общее сопротивление Rэкв уменьшается.

Напряжения в электрической цепи с параллельно соединенными сопротивлениями (рис. 1.6)

$$U = IR_{\text{экв}} = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

т.е. ток в цепи распределяется между параллельными ветвями обратно пропорционально их сопротивлениям.

По параллельно включенной схеме работают в номинальном режиме потребители любой мощности, рассчитанные на одно и то же напряжение. Причем включение или отключение одного или нескольких потребителей не отражается на работе остальных. Поэтому эта схема является основной схемой подключения потребителей к источнику электрической энергии.

Электрическая цепь со смешанным соединением элементов

Смешанным называется такое соединение, при котором в цепи имеются группы параллельно и последовательно включенных сопротивлений.

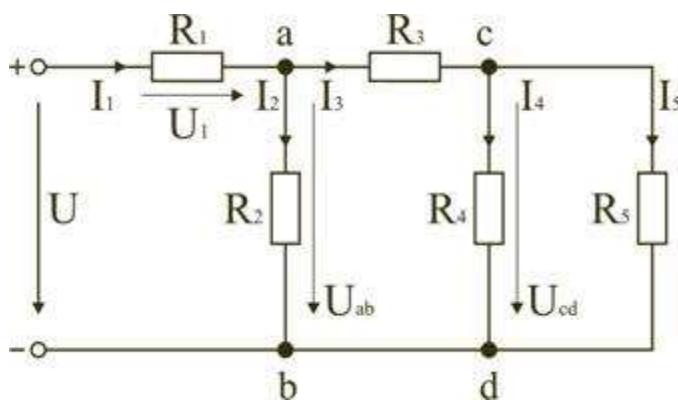


Рис. 1.7

Для цепи, представленной на рис. 1.7, расчет эквивалентного сопротивления начинается с конца схемы. Для упрощения расчетов примем, что все сопротивления в этой схеме являются одинаковыми: $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R$. Сопротивления R_4 и R_5 включены параллельно, тогда сопротивление участка цепи cd равно:

$$R_{cd} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{R R}{R + R} = \frac{R}{2}.$$

В этом случае исходную схему (рис. 1.7) можно представить в следующем виде (рис. 1.8):

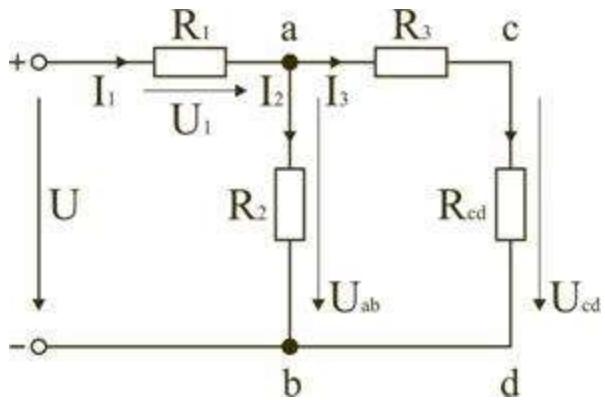


Рис. 1.8

На схеме (рис. 1.8) сопротивление R_3 и R_{cd} соединены последовательно, и тогда сопротивление участка цепи ad равно:

$$R_{ad} = R_3 + R_{cd} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

Тогда схему (рис. 1.8) можно представить в сокращенном варианте (рис. 1.9):

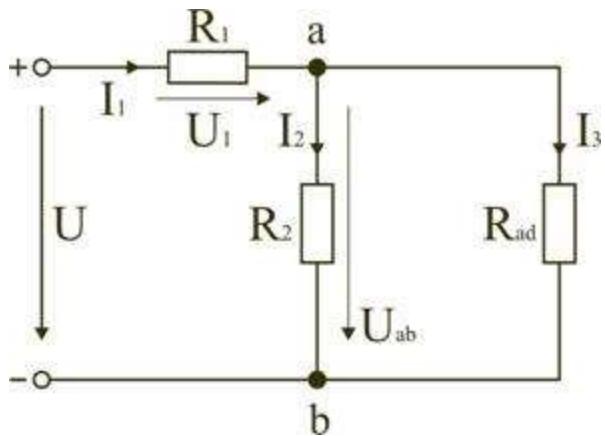


Рис. 1.9

На схеме (рис. 1.9) сопротивление R_2 и R_{ad} соединены параллельно, тогда сопротивление участка цепи ab равно

$$R_{ab} = \frac{R_2 R_{ad}}{R_2 + R_{ad}} = \frac{R \frac{3}{2}R}{R + \frac{3}{2}R} = \frac{3}{5}R$$

Схему (рис. 1.9) можно представить в упрощенном варианте (рис. 1.10), где сопротивления R_1 и R_{ab} включены последовательно.

Тогда эквивалентное сопротивление исходной схемы (рис. 1.7) будет равно:

$$R_{экв} = R_1 + R_{ab} = R + \frac{3}{5}R = \frac{8}{5}R$$

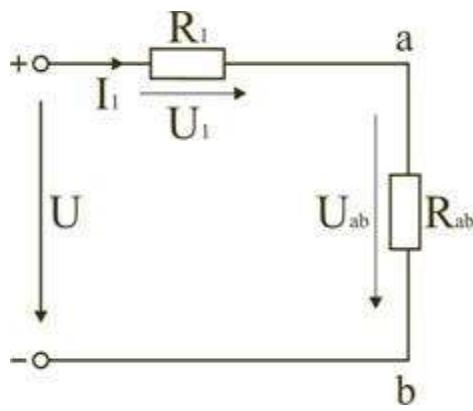


Рис. 1.10

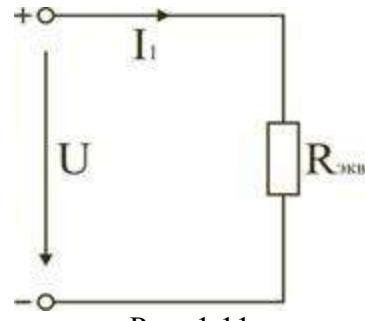


Рис. 1.11

В результате преобразований исходная схема (рис. 1.7) представлена в виде схемы (рис. 1.11) с одним сопротивлением $R_{экв}$. Расчет токов и напряжений для всех элементов схемы можно произвести по законам Ома и Кирхгофа.

Соединение элементов электрической цепи по схемам «звезда» и «треугольник»

В электротехнических и электронных устройствах элементы цепи соединяются по мостовой схеме (рис. 1.12). Сопротивления $R_{12}, R_{13}, R_{24}, R_{34}$ включены в плечи моста, в диагональ 1–4 включен источник питания с ЭДС E , другая диагональ 3–4 называется измерительной диагональю моста.

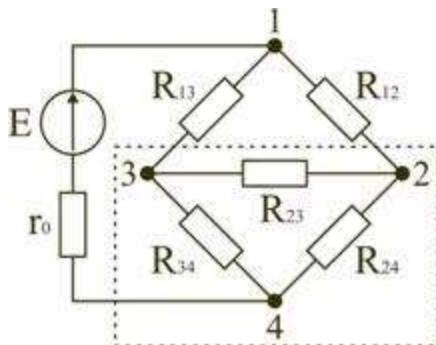


Рис. 1.12

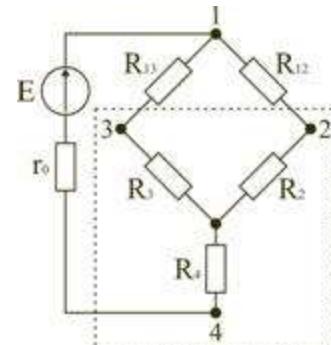


Рис. 1.13

В мостовой схеме сопротивления R_{13}, R_{12}, R_{23} и R_{24}, R_{34}, R_{23} соединены по схеме «треугольник». Эквивалентное сопротивление этой схемы можно определить только после замены одного из треугольников, например треугольника $R_{24}R_{34}R_{23}$ звездой $R_2R_3R_4$ (рис. 1.13). Такая замена будет эквивалентной, если она не вызовет изменения токов всех остальных элементов цепи. Для этого величины сопротивлений звезды должны рассчитываться по следующим соотношениям:

(1.8)

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{24}}{R_{23} + R_{24} + R_{34}} ; \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{34}}{R_{23} + R_{24} + R_{34}} ; \quad R_4 = \frac{R_{24}R_{34}}{R_{23} + R_{24} + R_{34}} .$$

Для замены схемы «звезда» эквивалентным треугольником необходимо рассчитать сопротивления треугольника:

(1.9)

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_4}; \quad R_{24} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 R_4}{R_3}; \quad R_{34} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_2}.$$

После проведенных преобразований (рис. 1.13) можно определить величину эквивалентного сопротивления мостовой схемы (рис. 1.12)

$$R_{\text{экв}} = \frac{(R_{12} + R_2)(R_{13} + R_3)}{(R_{12} + R_2) + (R_{13} + R_3)} + R_4.$$

1.5. Источник ЭДС и источник тока в электрических цепях

При расчете и анализе электрических цепей реальный источник электрической энергии с конечным значением величины внутреннего сопротивления r_0 заменяют расчетным эквивалентным источником ЭДС или источником тока.

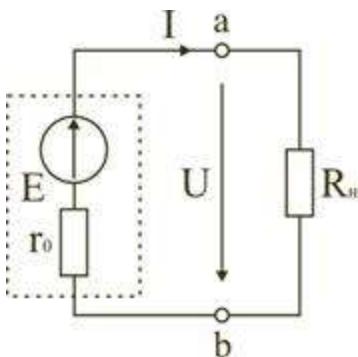


Рис. 1.14

Источник ЭДС (рис. 1.14) имеет внутреннее сопротивление r_0 , равное внутреннему сопротивлению реального источника. Стрелка в кружке указывает направление возрастания потенциала внутри источника ЭДС.

Для данной цепи запишем соотношение по второму закону Кирхгофа

(1.10)

$$E = U + Ir_0 \text{ или } E = U - Ir_0.$$

Эта зависимость напряжения U на зажимах реального источника от тока I определяется его вольт-амперной или внешней характеристикой (рис. 1.15). Уменьшение напряжения источника U при увеличении тока нагрузки I объясняется падением напряжения $\Delta U = Ir_0$ на его внутреннем сопротивлении r_0 .

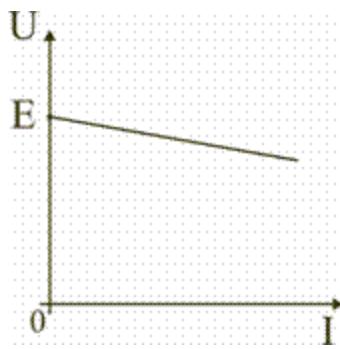


Рис. 1.15

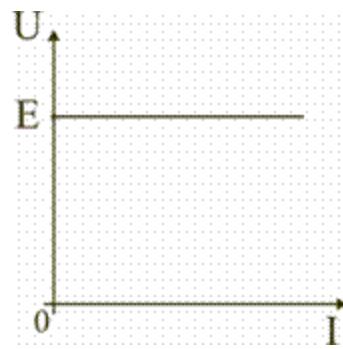


Рис. 1.16

У идеального источника ЭДС внутреннее сопротивление $r_0 \ll R_h$ (приближенно $r_0 \approx 0$). В этом случае его вольт-амперная характеристика представляет собой прямую линию (рис. 1.16), следовательно, напряжение U на его зажимах постоянно ($U=E$) и не зависит от величины сопротивления нагрузки R_h .

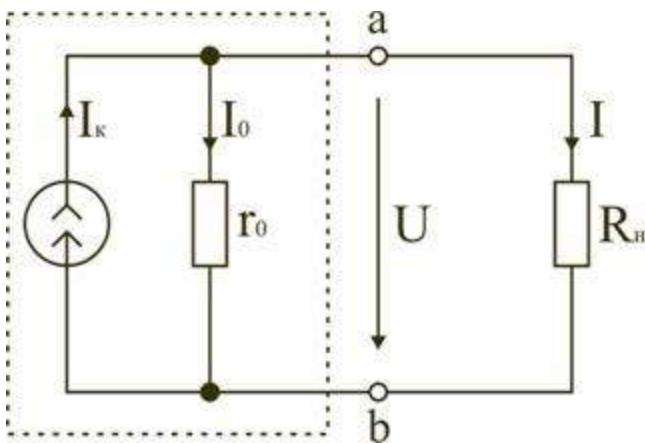


Рис. 1.17

Источник тока, заменяющий реальный источник электрической энергии, характеризуется неизменным по величине током I_k , равным току короткого замыкания источника ЭДС $\left(I_k = \frac{E}{r_0} \right)$, и внутренним сопротивлением r_0 , включенным параллельно (рис. 1.17).

Стрелка в кружке указывает положительное направление тока источника. Для данной цепи запишем соотношение по первому закону Кирхгофа

$$I_0 = \frac{U}{r_0}$$

$$I_k = I_0 + I;$$

В этом случае вольт-амперная (внешняя) характеристика $I(U)$ источника тока определится соотношением

(1.11)

$$I = I_k - I_0 = I_k - U/r_0$$

и представлена на рис. 1.18.

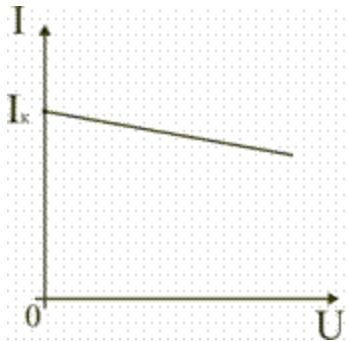


Рис. 1.18

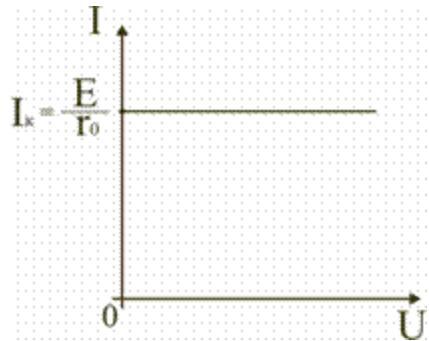


Рис. 1.19

Уменьшение тока нагрузки I при увеличении напряжения U на зажимах ab источника тока, объясняется увеличением тока I_0 , замыкающегося в цепи источника тока.

В идеальном источнике тока $r_0 \gg R_h$. В этом случае можно считать, что при изменении сопротивления нагрузки R_h потребителя $I_0 \approx 0$, а $I \approx I_k$. Тогда из выражения (1.11) следует, что вольт-амперная характеристика $I(U)$ идеального источника тока представляет прямую линию, проведенную параллельно оси абсцисс на уровне $I = I_k = E/r_0$ (рис. 1.19).

При сравнении внешних характеристик источника ЭДС (рис. 1.15) и источника тока (рис. 1.18) следует, что они одинаково реагируют на изменение величины сопротивления нагрузки. Покажем, что в обоих случаях ток I в нагрузке определяется одинаковым соотношением.

Ток в нагрузке R_h для схем источника ЭДС (рис. 1.14) и источника тока (рис. 1.17)

$$I = \frac{E}{(r_o + R_h)}$$

одинаков и равен

Для схемы (рис. 1.14) это следует из закона Ома, т.к. при последовательном соединении

$$I_k = \frac{E}{r_o}$$

сопротивления r_o и R_h складываются. В схеме (рис. 1.17) ток распределяется обратно пропорционально сопротивлениям r_o и R_h двух параллельных ветвей. Ток в нагрузке R_h

$$I = I_k \frac{r_o}{r_o + R_h} = \frac{E}{r_o} \times \frac{r_o}{r_o + R_h} = \frac{E}{r_o + R_h},$$

т.е. совпадает по величине с током при подключении нагрузки к источнику ЭДС.

Следовательно, схема источника тока (рис. 1.17) эквивалентна схеме источника ЭДС (рис. 1.14) в отношении энергии, выделяющейся в сопротивлении нагрузки R_h , но не эквивалентна ей в отношении энергии, выделяющейся во внутреннем сопротивлении источника питания.

Каким из двух эквивалентных источников питания пользоваться, не играет существенной роли. Однако на практике, особенно при расчете электротехнических устройств, чаще используется в качестве источника питания источник ЭДС с внутренним сопротивлением r_0 и величиной электродвижущей силы E .

В тех случаях, когда номинальное напряжение или номинальный ток и мощность источника электрической энергии оказываются недостаточными для питания потребителей, вместо одного используют несколько источников. Существуют два основных способа соединения источников питания: последовательное и параллельное.

Последовательное включение источников питания (источников ЭДС) применяется тогда, когда требуется создать напряжение требуемой величины, а рабочий ток в цепи меньше или равен номинальному току одного источника ЭДС (рис. 1.20).

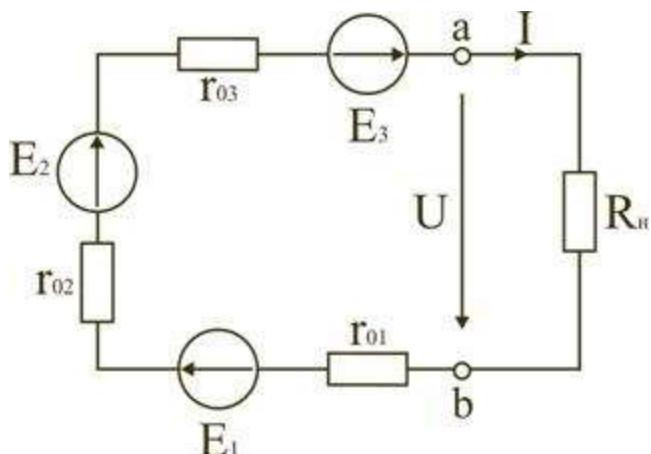


Рис. 1.20

Для этой цепи на основании второго закона Кирхгофа можно записать

$$E_1 + E_2 + E_3 = I(r_{01} + r_{02} + r_{03} + R_n),$$

откуда

$$I = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{r_{01} + r_{02} + r_{03} + R_n} = \frac{E_3}{r_3 + R_n}.$$

Таким образом, электрическая цепь на рис. 1.20 может быть заменена цепью с эквивалентным источником питания (рис. 1.21), имеющим ЭДС $E_\text{э}$ и внутреннее сопротивление $r_\text{э}$.

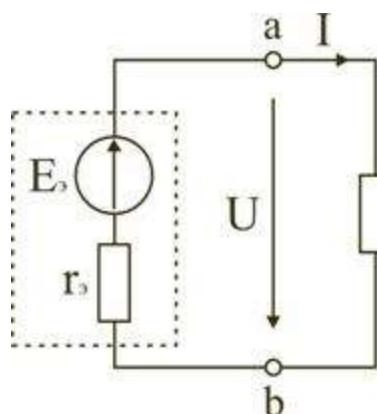


Рис. 1.21

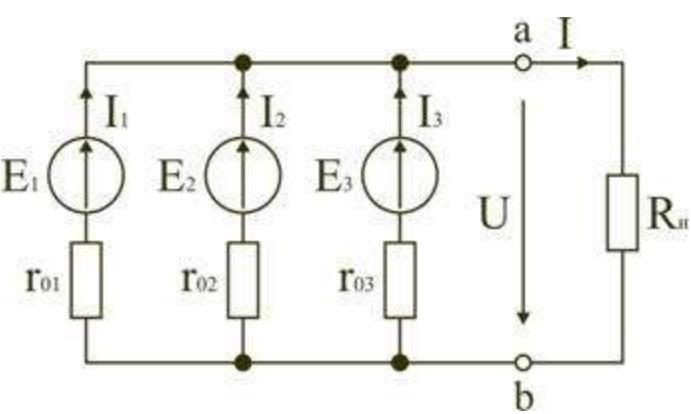


Рис. 1.22

При параллельном соединении источников (рис. 1.22) соединяются между собой положительные выводы всех источников, а также их отрицательные выводы. Характерным для параллельного соединения является одно и то же напряжение U на выводах всех источников. Для электрической цепи на рис. 1.22 можно записать следующие уравнения:

$$I = I_1 + I_2 + I_3; P = P_1 + P_2 + P_3 = U I_1 + U I_2 + U I_3 = UI.$$

Как видно, при параллельном соединении источников ток и мощность внешней цепи равны соответственно сумме токов и мощностей источников. Параллельное соединение источников применяется в первую очередь тогда, когда номинальные ток и мощность одного источника недостаточны для питания потребителей. На параллельную работу включают обычно источники с одинаковыми ЭДС, мощностями и внутренними сопротивлениями.

1.6. Режимы работы электрической цепи

При подключении к источнику питания различного количества потребителей или изменения их параметров будут изменяться величины напряжений, токов и мощностей в электрической цепи, от значений которых зависит режим работы цепи и ее элементов.

Реальная электрическая цепь может быть представлена в виде активного и пассивного двухполюсников (рис. 1.23).

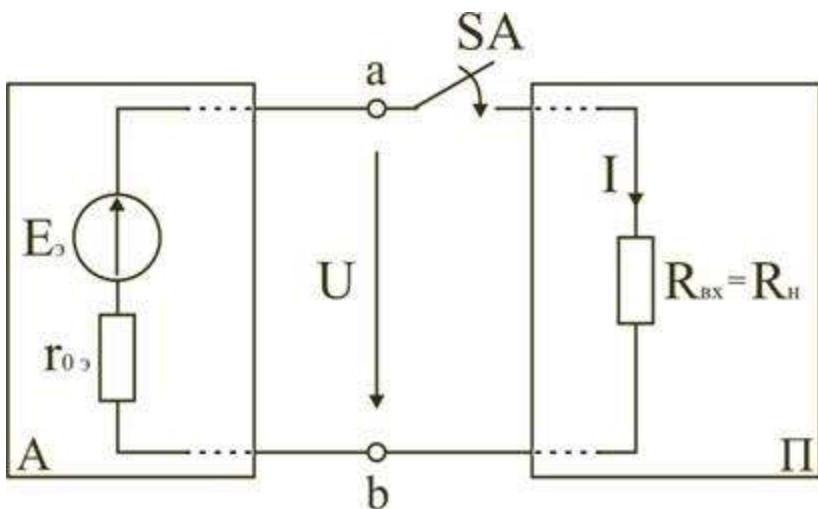


Рис. 1.23

Двухполюсником называют цепь, которая соединяется с внешней относительно нее частью цепи через два вывода a и b – полюса.

Активный двухполюсник содержит источники электрической энергии, а пассивный двухполюсник их не содержит. Для расчета цепей с двухполюсниками реальные активные и пассивные элементы цепи представляются схемами замещения. Схема замещения пассивного двухполюсника Π представляется в виде его входного сопротивления

$$R_{\text{вх}} = \frac{U}{I}.$$

Схема замещения активного двухполюсника А представляется эквивалентным источником с ЭДС $E_\text{э}$ и внутренним сопротивлением r_0 , нагрузкой для которого является входное сопротивление пассивного двухполюсника $R_{\text{вх}}=R_h$.

Режим работы электрической цепи (рис. 1.23) определяется изменениями параметров пассивного двухполюсника, в общем случае величиной сопротивления нагрузки R_h . При анализе электрической цепи рассматривают следующие режимы работы: холостого хода, номинальный, короткого замыкания и согласованный.

Работа активного двухполюсника под нагрузкой R_h определяется его вольт-амперной (внешней) характеристикой, уравнение которой (1.10) для данной цепи запишется в виде

$$(1.12)$$

$$U=E_\text{э}-Ir_0.$$

Эта вольт-амперная характеристика строится по двум точкам 1 и 2 (рис. 1.24), соответствующим режимам холостого хода и короткого замыкания.

1. Режим холостого хода

В этом режиме с помощью ключа SA нагрузка R_h отключается от источника питания (рис. 1.23). В этом случае ток в нагрузке становится равным нулю, и как следует из соотношения (1.12) напряжение на зажимах ab становится равным ЭДС $E_\text{э}$ и называется напряжением холостого хода $U_{\text{хх}}$

$$U=U_{\text{хх}}=E_\text{э}.$$

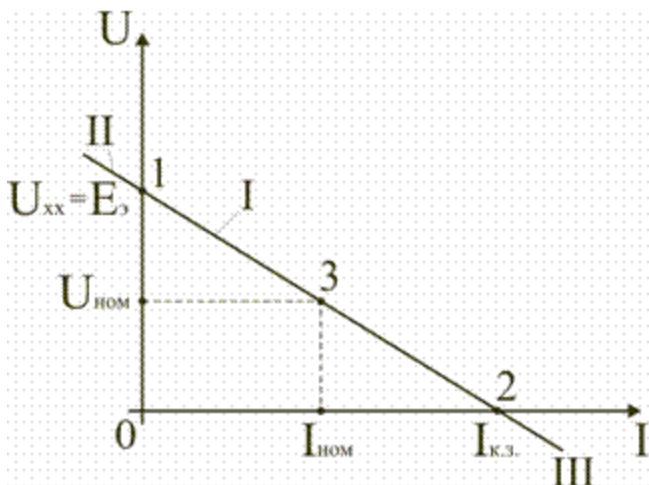


Рис. 1.24

2. Режим короткого замыкания

В этом режиме ключ SA в схеме электрической цепи (рис. 1.23) замкнут, а сопротивление $R_h=0$. В этом случае напряжение U на зажимах ab становится равным нулю, т.к. $U=IR_h$, а уравнение (1.12) вольт-амперной характеристики можно записать в виде

$$(1.13)$$

$$I = I_{k.z} = \frac{E_z}{r_{o.z}}$$

Значение тока короткого замыкания $I_{k.z}$ соответствует т.2 на вольт-амперной характеристикике (рис. 1.24).

Анализ этих двух режимов показывает, что при расчете электрических цепей параметры активного двухполюсника E_z и $r_{o.z}$ могут быть определены по результатам режимов холостого хода и короткого замыкания:

(1.14)

$$r_{o.z} = \frac{U_{xx}}{I_{k.z}}$$

$E_z = U_{xx}$

При изменении тока в пределах $0 \leq I \leq I_x$ активной двухполюсник (эквивалентный источник) отдает энергию во внешнюю цепь (участок I вольт-амперной характеристики на рис. 1.24). При токе $I < 0$ (участок II) источник получает энергию из внешней цепи, т.е. работает в режиме потребителя электрической энергии. Это произойдет, если к зажимам ab двухполюсника присоединена внешняя цепь с источниками питания. При напряжении $U < 0$ (участок III) резисторы активного двухполюсника потребляют энергию источников из внешней цепи и самого активного двухполюсника.

3. Номинальный режим

Номинальный режим электрической цепи обеспечивает технические параметры как отдельных элементов, так и всей цепи, указанные в технической документации, в справочной литературе или на самом элементе. Для разных электротехнических устройств указывают свои номинальные параметры. Однако три основных параметра указываются практически всегда: номинальное напряжение U_{nom} , номинальная мощность P_{nom} и номинальный ток I_{nom} .

Работа активного двухполюсника под нагрузкой в номинальном режиме определяется уравнением (1.12), записанном для номинальных параметров

(1.15)

$$U_{nom} = E_z - I_{nom} r_{o.z}$$

На вольт-амперной характеристикике (рис. 1.24) это уравнение определяется точкой 3 с параметрами U_{nom} и I_{nom} .

4. Согласованный режим

Согласованный режим электрической цепи обеспечивает максимальную передачу активной мощности от источника питания к потребителю. Определим параметры электрической цепи (рис. 1.23), обеспечивающие получение согласованного режима. При подключении нагрузки R_h к активному двухполюснику (рис. 1.23) в ней возникает ток

$$I = \frac{E_s}{r_{0s} + R_h}$$

При этом на нагрузке выделяется активная мощность

(1.16)

$$P = I^2 R_h = \frac{E_s^2}{(r_{0s} + R_h)^2} R_h$$

Определим соотношение между сопротивлением нагрузки R_h и внутренним сопротивлением r_0 эквивалентного источника ЭДС, при котором в сопротивлении нагрузки R_h выделяется максимальная мощность при неизменных значениях E_s и r_0 . С этой целью определим первую производную P по R_h и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dP}{dR_h} = \frac{(r_{0s} + R_h)^2 E^2 - 2(r_{0s} + R_h) R_h E^2}{(r_{0s} + R_h)^2} = \frac{E^2}{(r_{0s} + R_h)^2} (r_{0s}^2 - R_h^2) = 0$$

Так как выражение в знаменателе – конечное, то, отбрасывая не имеющее физического смысла решение $R_h = -r_0$, получим, что значение сопротивления нагрузки, согласованное с сопротивлением источника

(1.17)

$$R_h = r_0$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dR_h^2} < 0 \right)$$

Можно найти вторую производную и убедиться в том, что она отрицательна, поэтому соотношение (1.17) соответствует максимуму функции $P = F(R_h)$.

Подставив (1.17) в (1.16), получим значение максимальной мощности, которая может выделена в нагрузке R_h

(1.18)

$$P_{max} = \frac{E_s^2}{4r_{0s}}$$

Полезная мощность, выделяющаяся в нагрузке, определяется уравнением (1.16). Полная активная мощность, выделяемая активным двухполюсником,

$$P_{полн} = E_s I = \frac{E_s^2}{r_{0s} + R_h}$$

Коэффициент полезного действия

(1.19)

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{полн}}} = \frac{R_H}{r_0 + R_H}$$

если $R_H=r_0$, то $\eta = 0,5$.

Для мощных электротехнических устройств такое низкое значение КПД недопустимо. Но в электронных устройствах и схемах, где величина P измеряется в милливаттах, с низким КПД можно не считаться, поскольку в этом режиме обеспечивается максимальная передача мощности на нагрузку.

1.7. Расчет электрических цепей с использованием законов Ома и Кирхгофа

Законы Ома и Кирхгофа используют, как правило, при расчете относительно простых электрических цепей с небольшим числом контуров, хотя принципиально с их помощью можно рассчитать сколь угодно сложные электрические цепи.

При расчете электрических цепей в большинстве случаев известны параметры источников ЭДС или напряжения, сопротивления элементов электрической цепи, и задача сводится к определению токов в ветвях цепи. Зная токи, можно найти напряжения на элементах цепи, мощность, потребляемую отдельными элементами и всей цепью в целом, мощность источников питания и др.

Расчет цепи с одним источником питания

Электрическая цепь, схема которой приведена на рис. 1.25, состоит из одного источника питания, имеющего ЭДС E и внутреннее сопротивление r_0 , и резисторов R_1, R_2, R_3 , подключенных к источнику по смешанной схеме. Операции расчета такой схемы рекомендуется производить в определенной последовательности.

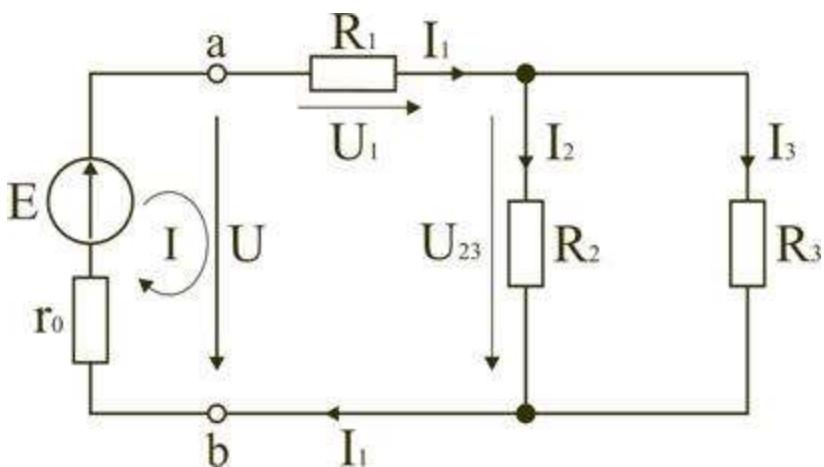


Рис. 1.25

1. Обозначение токов и напряжений на участках цепи.

Резистор R1 включен последовательно с источником, поэтому ток I1 для них будет общим, токи в резисторах R2 и R3 обозначим соответственно I2 и I3. Аналогично обозначим напряжения на участках цепи.

2. Расчет эквивалентного сопротивления цепи.

Резисторы R2 и R3 включены по параллельной схеме и заменяются согласно (1.7) эквивалентным сопротивлением:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

В результате цепь на рис. 1.25 преобразуется в цепь с последовательно соединенными резисторами R1, R23 и r0. Тогда эквивалентное сопротивление всей цепи запишется в виде:

$$R_\Theta = r_0 + R_1 + R_{23}$$

3. Расчет тока в цепи источника. Ток I1 определим по закону Ома (1.2):

$$I_1 = U / R_\Theta$$

4. Расчет напряжений на участках цепи. По закону Ома (1.1) определим величины напряжений:

$$U_1 = I_1 R_1; U_{23} = I_1 R_{23}$$

Напряжение U на зажимах ab источника питания определим по второму закону Кирхгофа (1.4) для контура I (рис. 1.25):

$$E = I_1 r_0 + U; U = E - I_1 r_0.$$

5. Расчет токов и мощностей для всех участков цепи. Зная величину напряжения U23, определим по закону Ома токи в резисторах R2 и R3:

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2}; I_3 = \frac{U_{23}}{R_3}$$

По формуле (1.8) определим величину активной электрической мощности, отдаваемую источником питания потребителям электрической энергии:

$$P = EI_1.$$

В элементах схемы расходуются активные мощности:

$$P_1 = I_1^2 R_1; P_2 = I_2^2 R_2; P_3 = I_3^2 R_3$$

На внутреннем сопротивлении r0 источника питания расходуется часть электрической мощности, отдаваемой источником. Эту мощность называют мощностью потерь **ΔP**:

$$\Delta P = I_1^2 r_0$$

6. Проверка правильности расчетов. Эта проверка производится составлением уравнения баланса мощностей (1.8): мощность, отдаваемая источником питания, должна быть равна сумме мощностей, расходуемых в резистивных элементах схемы:

$$EI_1 = I_1^2(r_0 + R_1) + I_2^2R_2 + I_3^2R_3$$

Кроме того, правильность вычисления токов можно проверить, составив уравнение по первому закону Кирхгофа (1.3) для узла схемы:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Расчет разветвленной электрической цепи с несколькими источниками питания

Основным методом расчета является метод непосредственного применения первого и второго законов Кирхгофа.

В качестве примера рассмотрим цепь, схема которой приведена на рис. 1.26. Схема цепи содержит 6 ветвей ($m=6$) и 4 узла: a, b, c, d ($n=4$). По каждой ветви проходит свой ток, следовательно число неизвестных токов равно числу ветвей, и для определения токов необходимо составить m уравнений. При этом по первому закону Кирхгофа (1.3) составляют уравнения для $(n-1)$ узлов. Недостающие $m-(n-1)$ уравнения получают по второму закону Кирхгофа (1.4), составляя их для $m-(n-1)$ взаимно независимых контуров. Рекомендуется выполнять операции расчета в определенной последовательности.

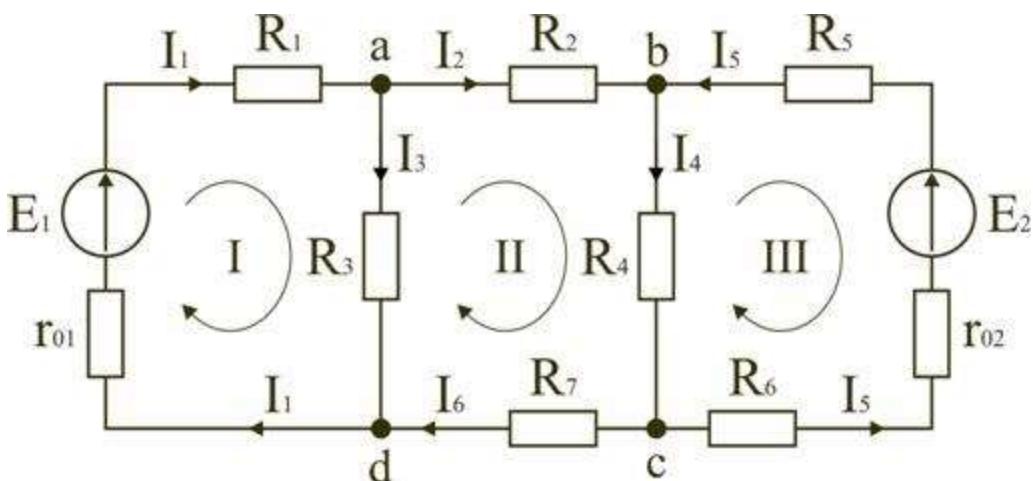


Рис. 1.26

1. Обозначение токов во всех ветвях. Направление токов выбираем произвольно, но в цепях с источниками ЭДС рекомендуется, чтобы направление токов совпадало с направлением ЭДС.

2. Составление уравнений по первому закону Кирхгофа. Выбираем 4–1=3 узла (a, b, c) и для них записываем уравнения:

узел a: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$;

узел b: $I_2 - I_4 + I_5 = 0$;

узел c: $I_4 - I_5 + I_6 = 0$.

3. Составление уравнений по второму закону Кирхгофа. Необходимо составить $6 - 3 = 3$ уравнения. В схеме на рис. 1.26 выбираем контура I, II, III и для них записываем уравнения:

контур I: $E_1 = I_1(r_{01} + R_1) + I_3R_3$;

контур II: $0 = I_2R_2 + I_4R_4 + I_6R_7 - I_3R_3$;

контур III: $-E_2 = -I_5(r_{02} + R_5 + R_6) - I_4R_4$.

4. Решение полученной системы уравнений и анализ результатов. Полученная система из шести уравнений решается известными математическими методами. Если в результате расчетов численное значение тока получено со знаком «минус», это означает, что реальное направление тока данной ветви противоположно принятому в начале расчета. Если в ветвях с ЭДС токи совпадают по направлению с ЭДС, то данные элементы работают в режиме источников, отдавая энергию в схему. В тех ветвях, где направления тока и ЭДС не совпадают, источники ЭДС работают в режиме потребителя.

5. Проверка правильности расчетов. Для проверки правильности произведенных расчетов можно на основании законов Кирхгофа написать уравнения для узлов и контуров схемы, которые не использовались при составлении исходной системы уравнений:

узел d: $I_3 + I_6 - I_1 = 0$

внешний контур схемы: $E_1 - E_2 = I_1(r_{01} + R_1) + I_2R_2 - I_5(r_{02} + R_5 + R_6) + I_6R_7$.

Независимой проверкой является составление уравнения баланса мощностей (1.8) с учетом режимов работы элементов схемы с ЭДС:

$$E_1I_1 + E_2I_5 = I_1^2(r_{01} + R_1) + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 + I_4^2R_4 + I_5^2(r_{02} + R_5 + R_6) + I_6^2R_7.$$

Если активная мощность, поставляемая источниками питания, равна по величине активной мощности, израсходованной в пассивных элементах электрической цепи, то правильность расчетов подтверждена.

1.8. Основные методы расчета сложных электрических цепей

С помощью законов Ома и Кирхгофа в принципе можно рассчитать электрические цепи любой сложности. Однако решение в этом случае может оказаться слишком громоздким и потребует больших затрат времени. По этой причине для расчета сложных электрических цепей разработаны на основе законов Ома и Кирхгофа более рациональные методы расчета, два из которых: метод узлового напряжения и метод эквивалентного генератора, рассмотрены ниже.

Метод узлового напряжения

Этот метод рекомендуется использовать в том случае, если сложную электрическую схему можно упростить, заменяя последовательно и параллельно соединенные резисторы эквивалентными, используя при необходимости преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду. Если полученная схема содержит несколько параллельно соединенных активных и пассивных ветвей, как, например, схема на рис. 1.27, то ее расчет и анализ весьма просто можно произвести методом узлового напряжения.

Пренебрегая сопротивлением проводов, соединяющих ветви цепи, в ее схеме (рис. 1.27) можно выделить два узла: а и б. В зависимости от значений и направлений ЭДС и напряжений, а также значений сопротивлений ветвей между узловыми точками а и б установится определенное узловое напряжение U_{ab} . Предположим, что оно направлено так, как показано на рис. 1.27, и известно. Зная напряжение U_{ab} легко найти токи во всех ветвях.

Выберем положительные направления токов и обозначим их на схеме. Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров (1.4), проходящих по первой и второй ветви, содержащих источники ЭДС, совершая обход контуров по часовой стрелке.

Первая ветвь: $E_1 = I_1(r_{01} + R_1) + U_{ab}$.

Вторая ветвь: $-E_2 = -I_2(r_{02} + R_2) + U_{ab}$.

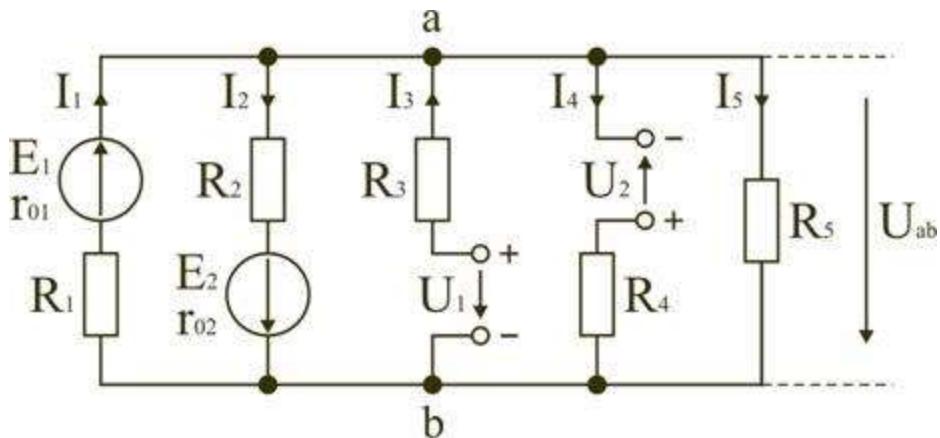


Рис. 1.27

Определим значения токов, возникающих в первой и второй ветвях,

(1.20)

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{r_{01} + R_1} = (E_1 - U_{ab})g_1,$$

(1.21)

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{ab}}{r_{02} + R_2} = (E_2 + U_{ab})g_2,$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{1}{r_{01} + R_1}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{1}{r_{02} + R_2}$$

где: \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 – проводимости соответственно первой и второй ветвей.

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для ветвей (1.5), содержащих источники напряжений, совершая обход контуров также по часовой стрелке.

Третья ветвь: $U_{ab} - U_1 + I_3 R_3 = 0$.

Четвертая ветвь: $U_{ab} + U_2 - I_4 R_4 = 0$.

Определим значения токов, возникающих в третьей и четвертой ветвях,

(1.22)

$$I_3 = \frac{U_1 - U_{ab}}{R_3} = (U_1 - U_{ab})\mathbf{g}_3,$$

(1.23)

$$I_4 = \frac{U_2 + U_{ab}}{R_4} = (U_2 + U_{ab})\mathbf{g}_4,$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{1}{R_3}, \quad \mathbf{g}_4 = \frac{1}{R_4}$$

где: \mathbf{g}_3 и \mathbf{g}_4 – проводимости соответственно третьей и четвертой ветвей.

Ток в пятой ветви определим по закону Ома:

(1.24)

$$I_5 = \frac{U_{ab}}{R_5} = U_{ab}\mathbf{g}_5,$$

$$\mathbf{g}_5 = \frac{1}{R_5}$$

где \mathbf{g}_5 – проводимость пятой ветви.

Для вывода формулы, позволяющей определить напряжение U_{ab} , напишем уравнение по первому закону Кирхгофа (1.3) для узла а:

$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$.

После замены токов их выражениями (1.20) – (1.24) и соответствующих преобразований получим

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2 + U_1 g_3 - U_2 g_4}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5}$$

Формула узлового напряжения в общем случае имеет вид

(1.25)

$$U_{ab} = \frac{\sum Eg + \sum Ug}{\sum g}$$

При расчете электрической цепи методом узлового напряжения после определения величины напряжения U_{ab} значения токов в ветвях находят по их выражениям (1.20) – (1.24).

При записи формулы (1.25) следует задаться положительным направлением узлового напряжения U_{ab} . Со знаком «+» в (1.25) должны входить ЭДС, направленные между точками a и b встречно напряжению U_{ab} , и напряжения ветвей, направленные согласно с U_{ab} . Знаки в формуле (1.25) не зависят от направления токов ветвей.

При расчете и анализе электрических цепей методом узлового напряжения рекомендуется выбирать положительные направления токов после определения узлового напряжения. В этом случае при расчете токов по выражениям (1.20) – (1.24) положительные направления токов нетрудно выбрать таким образом, чтобы все они совпадали с их действительными направлениями.

Проверка правильности произведенных расчетов проводится по первому закону Кирхгофа для узла a или b , а также составлением уравнения баланса мощностей (1.8).

Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора позволяет произвести частичный анализ электрической цепи. Например, определить ток в какой-либо одной ветви сложной электрической цепи и исследовать поведение этой ветви при изменении ее сопротивления. Сущность метода заключается в том, что по отношению к исследуемой ветви amb (рис. 1.28, а) сложная цепь заменяется активным двухполюсником А (смотри рис. 1.23), схема замещения которого представляется эквивалентным источником (эквивалентным генератором) с ЭДС E_a и внутренним сопротивлением r_{0a} , нагрузкой для которого является сопротивление R ветви amb .

Если известны ЭДС и сопротивление эквивалентного генератора, то ток I в ветви amb определяется по закону Ома

$$I = \frac{E_a}{r_{0a} + R}$$

Покажем, что параметры эквивалентного генератора E_a и r_{0a} можно определить соответственно по режимам холостого хода и короткого замыкания активного двухполюсника.

В исследуемую схему (рис. 1.28, а) введем два источника, ЭДС которых E_1 и $E_\text{э}$ равны и направлены в разные стороны (рис. 1.28, б). При этом величина тока I в ветви amb не изменится. Ток I можно определить как разность двух токов $I=I_\text{э}-I_1$, где I_1 – ток, вызванный всеми источниками двухполюсника А и ЭДС E_1 (рис. 1.28, в); $I_\text{э}$ – ток, вызванный только ЭДС $E_\text{э}$ (рис. 1.28, г).

Если выбрать ЭДС E_1 такой величины, чтобы получить в схеме (1.28, в) ток $I_1=0$, то ток I будет равен (рис. 1.28, г)

$$I = I_\text{э} = \frac{E_\text{э}}{r_{0\text{э}} + R},$$

где $r_{0\text{э}}$ – эквивалентное сопротивление двухполюсника А относительно выводов а и б.

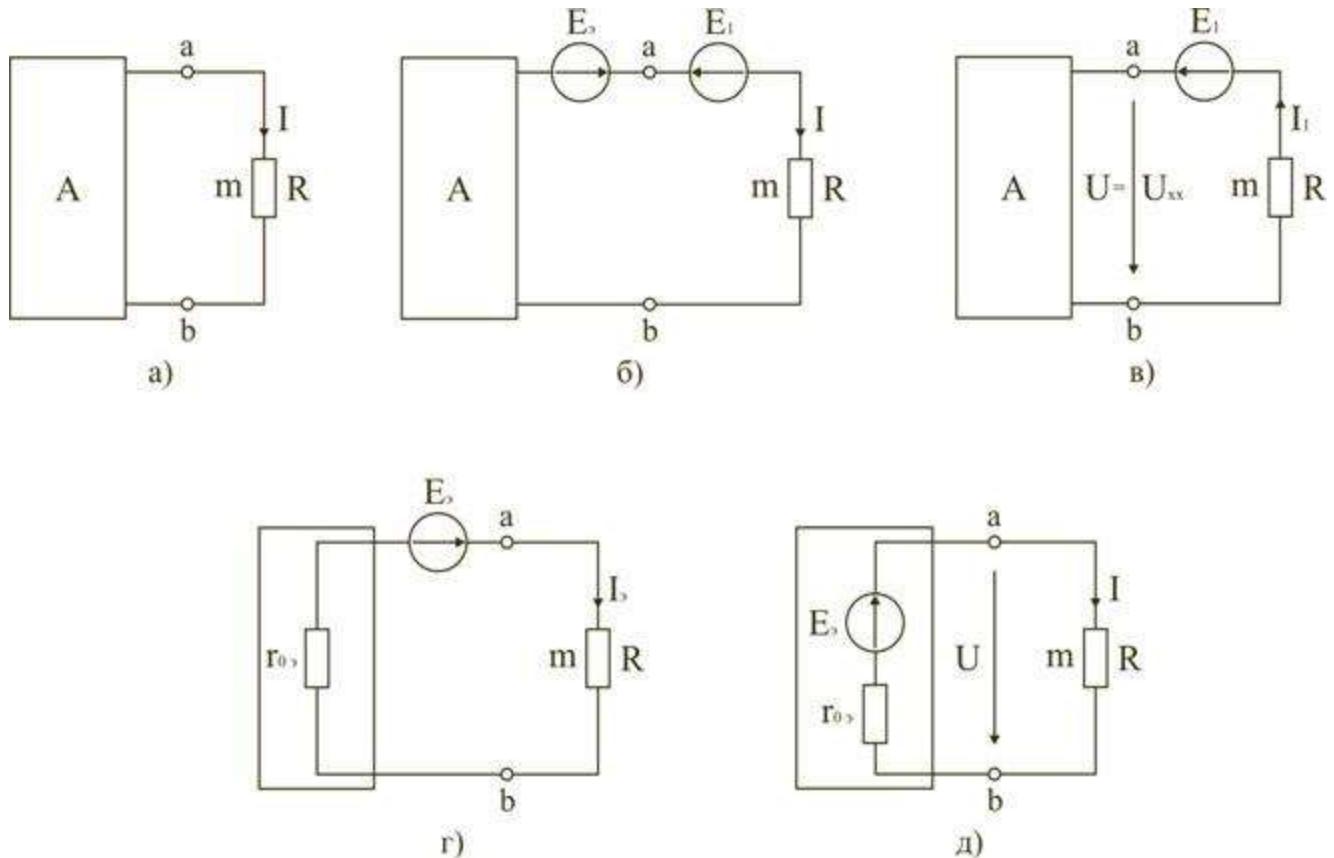


Рис. 1.28

Так как при $I_1=0$ (рис. 1.28, в) активный двухполюсник А будет работать относительно ветви amb в режиме холостого хода, то между выводами а и б установится напряжение холостого хода $U=U_{xx}$ и по второму закону Кирхгофа для контура $amba$ получим $E_1=I_1R+U_{xx}=U_{xx}$. Но по условию $E_\text{э}=E_1$, поэтому и $E_\text{э}=U_{xx}$. Учитывая это, формулу для определения тока I можно записать в такой форме:

(1.26)

$$I = \frac{E_\text{э}}{r_{0\text{э}} + R} = \frac{U_{xx}}{r_{0\text{э}} + R}.$$

В соответствии с (1.26) электрическая цепь на рис. 1.28, а может быть заменена эквивалентной цепью (рис. 1.28, д), в которой $E_{\text{э}}=U_{xx}$ и $r_{0\text{э}}$ следует рассматривать в качестве параметров некоторого эквивалентного генератора.

Значения $E_{\text{э}}=U_{xx}$ и $r_{0\text{э}}$ можно определить как расчетным, так и экспериментальным путем. Для расчетного определения U_{xx} и $r_{0\text{э}}$ необходимо знать параметры элементов активного двухполюсника и схему их соединения.

Для определения величины $r_{0\text{э}}$ необходимо удалить из схемы двухполюсника все источники, сохранив все резистивные элементы, в том числе и внутренние сопротивления источников ЭДС. Внутренние сопротивления источников напряжений принять равными нулю. Затем рассчитать известными методами эквивалентное сопротивление относительно выводов ab .

Для определения величины $E_{\text{э}}$ разомкнем цепь и определим по методу узлового напряжения напряжение $U_{ab}=U_{xx}=E_{\text{э}}$ между выводами ab активного двухполюсника.

Экспериментально параметры эквивалентного генератора можно определить по результатам двух опытов. Разомкнув ветвь с сопротивлением R (рис. 1.28, д), измеряем напряжение между выводами a и b $U_{ab}=U_{xx}=E_{\text{э}}$ (опыт холостого хода).

Для определения $r_{0\text{э}}$ проводится (если это допустимо) опыт короткого замыкания: заданная ветвь замыкается накоротко и в ней измеряется ток короткого замыкания I_{kz} . По закону Ома рассчитываем величину $r_{0\text{э}}=E_{\text{э}}/I_{kz}$.

